Die physikalischen und mathematischen Grundlagen der Wärme- und Stoffübertragung

Von Dr. Ing. habil. K. NESSELMANN, Wiesbaden

I. Allgemeines

Große Gebiete der chemischen Verfahrenstechnik werden von den Gesetzen der Wärme- und Stoffübertragung beherrscht. Hierher gehören sämtliche Apparate zur Wärmeübertragung und solche Einrichtungen, in denen Diffusionsvorgänge auftreten. Soll beispielsweise aus einem Gemisch von Luft und Wasserdampf der letztere entfernt werden, so kann man das Gemisch an gekühlten Wandungen vorbeiführen, an denen der Wasserdampf kondensiert. Es findet dabei dauernd ein Stofftransport des Wasserdampfes in Richtung auf die gekühlte Wand statt. Die gekühlte Wand kann auch durch einen Stoff ersetzt werden, der den Wasserdampf absorbiert. Die Gesetzmäßigkeiten sind dann die gleichen. Umgekehrt kann auch von einer Oberfläche aus ein Stoff in ein anderes Gas hinein verdunsten.

Daß die Wärme- und Stoffübertragung unter einheitlichen Gesichtspunkten betrachtet werden kann, ja sogar oft betrachtet werden muß, liegt einerseits daran, daß die mathematischen Grundlagen für beide Vorgänge sehr ähnlich, unter bestimmten Voraussetzungen sogar identisch sind. Andererseits treten in ein und demselben Apparat oft beide Vorgänge gleichzeitig auf, so daß sie sich überdecken. Als Beispiel sei wiederum die Entfernung von Wasserdampf aus Luft durch Auskondensieren aufgeführt. Außer dem oben bereits erwähnten Stofftransport in Richtung der gekühlten Wand tritt noch in derselben Richtung ein Wärmetransport auf, denn die Temperatur des Gemisches muß dauernd gesenkt, d. h. es muß abgekühlt werden.

Es gibt eine große Anzahl von ausführlichen Darstellungen der Wärme- und Stoffübertragung[1]. Im folgenden soll das Grundsätzliche der beiden Vorgänge und die Methoden ihrer Vorausberechnung allgemein aufgezeigt werden.

II. Wärmedurchgang und Diffusion

Dem Wärmedurchgang entspricht die Diffusion. Wir betrachten zunächst den ersteren. In Abb. 1 ist die Schicht eines Stoffes dargestellt. Es bedeutet

[1] H. GRÖBER und S. ERK, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Springer, Berlin 1933; M. TEN BOSCH, *Die Wärmeübertragung*, Springer, Berlin 1936; A. SCHACK, *Der industrielle Wärmeübergang*, Stahleisen, Düsseldorf 1948; K. NESSELMANN, *Die Grundlagen der angewandten Thermodynamik*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950; A. BUSEMANN, *Der Wärme- und Stoffaustausch*, Springer, Berlin 1933; E. ECKERT, *Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1949; W. MATZ, *Die Thermodynamik des Wärme- und Stoffaustausches in der Verfahrenstechnik*, Steinkopff, Frankfurt 1949; G. ACKERMANN, *Wärmeübergang und molekulare Stoffübertragung im gleichen Feld bei großen Temperatur- und Partialdruckdifferenzen*, VDI-Forsch.-Heft 382 (1937); *Taschenbuch «Hütte»*, Bd. 1, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1949.

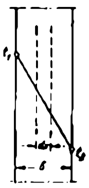

Abb. 1. Erläuterung des Wärmedurchgangs

t_1 die höhere Temperatur auf der linken Seite der Schicht (°C),
t_2 die tiefere Temperatur auf der rechten Seite der Schicht (°C),
λ die Wärmeleitzahl (kcal/m h grd),
F die Fläche normal zur Schicht (m²),
dx das Längendifferential in Richtung normal zur Fläche (m),
δ die Dicke der Schicht (m),
dt das Temperaturdifferential in Richtung normal zur Fläche (°C).

Dann ist die durch die Schicht strömende Wärmemenge

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dx} F = \frac{\lambda (t_1 - t_2)}{\delta} F \text{ kcal/h.} \qquad (1)$$

In Abb. 2 ist die Schicht eines Gemisches aus zwei Gasen (′) und (″) dargestellt.

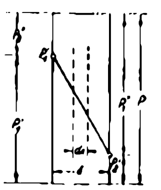

Abb. 2. Erläuterung der Diffusion

Es sei

P der Gesamtdruck (kg/m²),
P_1' der höhere Teildruck des Gases (′) auf der linken Seite der Schicht (kg/m²),
P_2' der tiefere Teildruck des Gases (′) auf der rechten Seite der Schicht (kg/m²),
$P_1'' = P - P_2'$ der höhere Teildruck des Gases (″) auf der rechten Seite der Schicht (kg/m²),
$P_2'' = P - P_1'$ der tiefere Teildruck des Gases (″) auf der linken Seite (kg/m²),
T die absolute Temperatur der Gasschicht (°K),
k die Diffusionszahl (m²/h),
dP' der Teildruckabfall des Gases (′) auf das Längendifferential dx,
dc' der Konzentrationsabfall des Gases (′) auf das Längendifferential dx (kmol/m³).

Dann ist die Anzahl der Mole N' des Gases (′), die stündlich von links nach rechts diffundieren,

$$N' = -k \frac{dc'}{dx} F. \qquad (2)$$

Nun ist aber mit γ' als spezifischem Gewicht des Gases (′) in kg/m³ und m' als Molekulargewicht

$$c' = \frac{\gamma'}{m'}. \qquad (3)$$

Ferner ist nach der Zustandsgleichung für Gase

$$\gamma' = \frac{P'}{R'T} \qquad (4)$$

mit R' als Gaskonstante in m/grd. Multipliziert man Gl. (2) mit m' und substituiert Gl. (3) und (4), so folgt für das stündlich diffundierende Gewicht des Gases (′)

$$G' = -\frac{k}{R'T} \frac{dP'}{dx} F = \frac{k}{R'T} (P_1' - P_2') F \text{ kg/h.} \qquad (5)$$

Man erkennt, daß Gl. (5) im Aufbau mit Gl. (1) identisch ist.

Bei den in Abb. 2 dargestellten Verhältnissen ist vorausgesetzt, daß auf der linken Seite in die Schicht so viel Gas (′) zugeleitet wird, als auf der rechten Seite verschwindet. Andererseits diffundiert auch das Gas (″) in Richtung seines Druckgefälles von rechts nach links. Es muß also vom Gas (″) auf der linken Seite ebensoviel verschwinden, als rechts zugeführt wird. Man nennt diesen Vorgang ein Problem mit «volldurchlässigen Grenzflächen», d. h. beide Gase können die Grenzflächen der Schicht durchdringen.

In der Praxis ist diese Voraussetzung in der Regel nicht erfüllt. Zwischen den beiden Wänden (Abb. 2) ströme feuchte Luft. Die rechte Wand sei gekühlt, die linke ungekühlt. Dann schlägt sich, sofern die Temperatur der rechten Wand unterhalb des Taupunktes liegt, Wasser auf der rechten Wandung nieder, und es tritt eine Diffusion des Wasserdampfes von links nach rechts ein, entsprechend dem Teildruckgefälle. Das Teildruckgefälle der Luft verursacht nun aber eine Luftdiffusion von rechts nach links. Da nun aber durch die linke Wandung keine Luft entfernt werden kann, entsprechend dem Entzug des Wasserdampfes an der rechten Wand, würde auf der linken Seite eine Stauung und damit eine Erhöhung des Gesamtdruckes eintreten, was nicht möglich ist. Es muß sich daher dem Diffusionsvorgang ein Strömungsvorgang von links nach rechts überlagern, der so viel feuchte Luft nach rechts befördert, daß ein Druckanstieg auf der linken Seite verhindert wird. Man spricht in diesem Fall von «halbdurchlässigen Grenzflächen». Es ist dann[2]

$$G' = -\frac{k}{R'T} \frac{P}{P - P'} \frac{dP'}{dx} F \text{ kg/h.} \qquad (6)$$

Man erkennt durch Vergleich von Gl. (5) und (6), daß für halbdurchlässige Grenzflächen G' größer ist als bei volldurchlässigen Grenzflächen. Ist P' sehr klein im Verhalten zum Gesamtdruck P, so geht Gl. (6) in (5) über.

III. Wärme- und Stoffübergang bei erzwungener turbulenter Strömung

Die bisher abgeleiteten Beziehungen sind indessen für den praktischen Gebrauch noch nicht geeignet. Für die

[2] Vgl. K. Nesselmann, *Die Grundlagen der angewandten Thermodynamik*. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

Wärmeübertragung liegen die Verhältnisse beispielsweise folgendermassen: Durch ein Rohr, dessen Wand die tiefere Temperatur t_w habe, ströme eine Flüssigkeit oder ein Gas mit der höheren Temperatur t_F. Der strömende Stoff wird dann Wärme an die Wandung abgeben. Selbstverständlich kann auch die Wandtemperatur höher und die Temperatur des strömenden Stoffes tiefer sein, wobei dann der Wärmestrom die umgekehrte Richtung hat. In den meisten praktischen Fällen wird die Strömung turbulent sein. Bei grober Betrachtung bedeutet dies, daß in einem fast das ganze Rohr ausfüllenden Kern außer der Hauptgeschwindigkeitskomponente der Strömung in axialer Richtung so erhebliche Geschwindigkeitskomponenten der makroskopischen Stoffteilchen auch senkrecht zur Achse vorhanden sind, daß die Temperatur in diesem Bereich ziemlich konstant ist. Man kann die Turbulenz mit einer Art Rührwirkung vergleichen. Lediglich in unmittelbarer Nähe der Wandungen ist eine laminare Grenzschicht vorhanden, von der man sagen kann, daß keine Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Wand vorhanden sind. Diese Grenzschicht hat also keine Rührwirkung und wird daher dem Wärmetransport den eigentlichen Widerstand entgegensetzen, so daß in dieser Grenzschicht der Temperaturabfall zur Wand hin stattfindet. Ihre Dicke hängt von den geometrischen Verhältnissen, der Geschwindigkeit und der Art des strömenden Mediums ab.

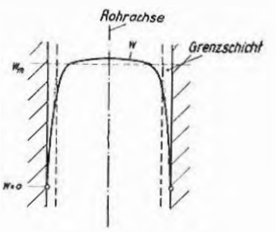

Abb. 3. Geschwindigkeitsverteilung in einem Rohr bei turbulenter Strömung

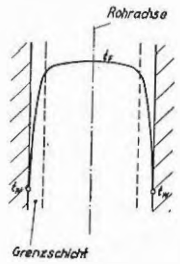

Abb. 4. Temperaturverteilung in einem Rohr bei turbulenter Strömung

In Abb. 3 und 4 sind die Verhältnisse dargestellt. Abb. 3 zeigt die Verteilung der Geschwindigkeit w über dem Querschnitt des Rohres. Der gestrichelte Verlauf ist idealisiert, wobei dann w_m die mittlere Geschwindigkeit bedeutet. Abb. 4 zeigt die Temperaturverteilung.

Man setzt nun die an die Wandung übergehende Wärmemenge

$$Q = \alpha(t_F - t_w)\, F \text{ kcal/h}, \qquad (7)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor α die Dimension kcal/m²hgrd hat und Wärmeübergangszahl genannt wird. Ist $(dt/dx)_0$ der Temperaturabfall in unmittelbarer Nähe der Wand, so ist auch

$$Q = -\lambda \left(\frac{dt}{dx}\right)_0 F. \qquad (8)$$

Dieselbe Betrachtung gilt beim Stoffübergang. Hat man es beispielsweise wieder mit einer Mischung aus Luft und Wasserdampf zu tun und läßt man den Wasserdampf, der im turbulenten Kern der Strömung im Rohr (Abb. 5) den Teildruck P_F' habe, an der kalten Rohrwand auskondensieren, so ist der Teildruck des Wasserdampfes an der Wandung P_w'. Er entspricht dem Sättigungsdruck des Wassers bei der Temperatur der Rohrwand. Aus den vorher geschilderten Gründen wird die laminare Grenzschicht für die Stoffübertragung maßgebend sein, und man kann setzen

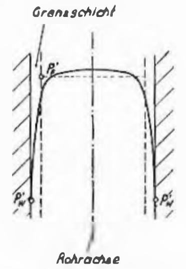

Abb. 5. Teildruck des diffundierenden Stoffes bei turbulenter Strömung in einem Rohr

$$G' = \frac{\beta}{R'T}(P_F' - P_w')\, F \text{ kg/h}, \qquad (9)$$

$$G' = -\frac{k}{R'T}\left(\frac{dP'}{dx}\right)_0 F, \qquad (10)$$

entsprechend den Gl. (7) und (8). Es entsprechen sich also Wärmeleitzahl λ und Diffusionszahl k einerseits und Wärmeübergangszahl α und Stoffübergangszahl β andererseits. Die Überlegungen bleiben die gleichen, wenn es sich nicht um ein Auskondensieren eines der Bestandteile aus einem Gasgemisch, sondern um Absorption oder Adsorption handelt. Maßgebend für P_w' ist dann der Dampfdruck des Stoffes (') über dem Ab- bzw. Adsorptionsmittel. Bei praktischen Fragen kommt es in der Regel darauf an, bei gegebenen t_F und t_w bzw. P_F' und P_w' diejenige Fläche F zu berechnen, die eine verlangte Wärme- oder Stoffübertragung gewährleistet. Man muß also für die verschiedenen Bedingungen der Apparate die Werte α und β kennen.

Um zunächst einmal beim Wärmeübergang zu bleiben, wird man als erstes eine exakte Berechnung versuchen und diejenigen Differentialgleichungen aufstellen, die das Problem beherrschen.

Betrachten wir innerhalb des strömenden Stoffes einen Elementarraum, so gilt für diesen die Kontinuitätsgleichung. Ferner greifen an der im Elementarraum befindlichen Masse die Druck-, Reibungs- und Auftriebskräfte an, letztere bedingt durch den Unterschied im spezifischen Gewicht des betrachteten Teilchens im Vergleich zu den Nachbarteilchen. Diese Kräfte stehen mit den Trägheitskräften im Gleichgewicht. Diese Betrachtung führt zur Bewegungsgleichung. Schließlich kann auf den Elementarraum auch noch die Energiegleichung angewendet werden in der Weise, daß die dem Raum zuströmende Wärme gleich der ihn verlassenden Wärme ist. Nimmt man dazu noch die Zusammenhänge Gl. (7) und (8), nach denen α eine Funktion des Temperaturgradienten an der Wandung ist, so ließe sich aus den genannten Beziehungen α exakt berechnen. Leider liegen jedoch die Verhältnisse so verwickelt, daß sich die Integration nur in ganz wenigen Sonderfällen durchführen läßt. Indessen gestatten Ähnlichkeitsbetrachtungen eine wesentliche Vereinfachung. Betrachtet man nämlich geometrisch ähnliche Systeme, bei denen sich auch alle übrigen in den erwähnten Gleichungen vorkommenden Größen an allen Stellen des Systems um konstante Faktoren unterscheiden, so findet man, daß das Problem durch vier dimensionslose Kennzahlen bestimmt wird, und zwar:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad \text{(Nusseltsche Kennzahl)}, \tag{11}$$

$$Re = \frac{w l}{\nu} \quad \text{(Reynoldssche Kennzahl)}, \tag{12}$$

$$Pe = \frac{w l}{a} \quad \text{(Pecletsche Kennzahl)}, \tag{13}$$

$$Gr = \frac{g l^3 (T_F - T_w) \varepsilon}{\nu^2}. \tag{14}$$

Hierin ist außer den früher schon verwendeten Zeichen

- w eine charakteristische Geschwindigkeit, z. B. die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Rohr,
- l eine charakteristische Länge des Systems, z. B. der Rohrdurchmesser oder die Länge einer Platte,
- ν die kinematische Zähigkeit des strömenden Stoffes,
- $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$ die sogenannte Temperaturleitfähigkeit, wobei λ, c und γ beziehentlich Wärmeleitzahl, spezifische Wärme und spezifisches Gewicht des strömenden Stoffes bedeuten,
- g die Erdbeschleunigung,
- T_w die absolute Temperatur der Wand,
- T_F die absolute Temperatur des strömenden Stoffes,
- ε der räumliche Ausdehnungskoeffizient des strömenden Stoffes.

Für Gase ist $\varepsilon = 1/T$, so daß sich dann für die Grashofsche Kennzahl

$$Gr = \frac{g l^3}{\nu^2}\left(1 - \frac{T_w}{T_F}\right) \tag{15}$$

ergibt.

Die Grashofsche Kennzahl berücksichtigt den Auftrieb, der durch die Differenz der Temperaturen des strömenden Stoffes und der Wand erfaßt wird. Sind noch, z. B. bei Diffusionsvorgängen in Gasen, an verschiedenen räumlichen Stellen die mittleren Molekulargewichte des Gemisches an der Wand M_w und im Inneren M_F verschieden, so ergibt sich als Erweiterung von Gl. (15)

$$Gr = \frac{g l^3}{\nu}\left(1 - \frac{T_w M_F}{T_F M_w}\right). \tag{16}$$

Zuweilen leitet man aus den bisher erwähnten Kennzahlen noch eine weitere ab, nämlich

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\nu}{a} \quad \text{(Prandtlsche Kennzahl)}. \tag{17}$$

Für die Lösung der Aufgabe, d. h. für die Berechnung von α, ergeben sich dann wahlweise folgende Zusammenhänge:

$$Nu = f_1\,(Re;\, Pe;\, Gr), \tag{18}$$

$$Nu = f_2\,(Re;\, Pr;\, Gr), \tag{19}$$

$$Nu = f_3\,(Pr;\, Pe;\, Gr). \tag{20}$$

Welcher Art diese Funktionen sind, kann allerdings die Ähnlichkeitstheorie nicht angeben. Es hat sich jedoch experimentell herausgestellt, daß Nu und damit α durch Potenzprodukte der Kennzahlen ausgedrückt werden kann. Für die erzwungene turbulente Strömung ergibt sich noch die Vereinfachung, daß die Auftriebskräfte im Vergleich zu den anderen vernachlässigt werden können, so daß Gr aus den Gleichungen herausfällt.

Für tropfbare Flüssigkeiten folgt dann unter Verwendung von Gl. (19)

$$Nu = K_1\, Re^{n_1}\, Pr^{n_2} \tag{21}$$

mit den Konstanten K_1, n_1, n_2.

Bei Gasen hängt Pr aus Gründen, die in der kinetischen Gastheorie liegen, lediglich vom Adiabaten-Exponenten $\varkappa$ ab. Für Gase gleicher Atomzahl ist daher Pr konstant.

Unter Verwendung von Gl. (20) würde für Gase also folgen

$$Nu = K_2\, Pr^{m_1}\, Pe^{m_2}. \tag{22}$$

Nun lehrt die experimentelle Erfahrung, daß der Exponent m_1 von Pr sehr klein ist, so daß Pr^{m_1} in die Konstante einbezogen werden kann. Das ergibt

$$Nu = K_3 Pe^{m_2}. \tag{23}$$

Die Werte der Konstanten können je nach dem verwendeten geometrischen System (Rohr, Platte, Rohrbündel usw.) verschieden sein.

Für tropfbare Flüssigkeiten im Kreisrohr ist unter Zugrundelegen von Gl. (21) nach Kraussold[3] $K_1 = 0{,}024$, $n_1 = 0{,}8$ und $n_2 = 0{,}37$.

Bei Gasen ergeben sich für einige besonders wichtige Fälle die in Tab. 1 zusammengestellten Werte.

Tab. 1. Konstanten der Gl. (23) für einige wichtige Fälle[4]

Kennzeichnung	K_3	m_2	Nu	Gasgeschwindigkeit, bezogen auf
Gerades Rohr Durchmesser d	0,040	0.75	$\frac{\alpha d}{\lambda}$	mittlere Gasgeschwindigkeit im Rohr
Rohrbündel senkrecht angeströmt. Rohrdurchmesser d	0,075	0,75	$\frac{\alpha d}{\lambda}$	engste Stelle zwischen den Rohren
Strömung entlang einer ebenen Wand von der Länge L	0,075	0,75	$\frac{\alpha L}{\lambda}$	Strömungsgeschwindigkeit $w > 5$ m/s

Handelt es sich nicht um ein kreisförmiges Rohr, sondern um einen beliebigen anderen Rohrquerschnitt, so kann auf Grund gewisser Ähnlichkeitsbetrachtungen der

[3] H. Kraussold, Forschg. Ing.-Wes. 4, 39 (1933).
[4] *Taschenbuch «Hütte»*, Bd. 1, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1949. Siehe daselbst auch Angaben über weitere Systeme.

sogenannte gleichwertige Durchmesser d_0 angegeben werden, der dieselben Verhältnisse ergibt wie der vorgelegte Querschnitt.

Es ist
$$d_0 = \frac{4F}{U}, \tag{24}$$
worin F der Querschnitt des Rohres oder Kanals und U der Umfang der Fläche ist, die die Strömung begrenzt. So ist z. B. für den rechteckigen Kanal (Abb. 6)
$$d_0 = \frac{4ab}{a+b}$$
und für die Ringfläche des Doppelrohr-Wärmeaustauschers (Abb. 7)
$$d_0 = \frac{4\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)}{\pi(D+d)} = \frac{D^2-d^2}{D+d}.$$
Auf diese Weise können alle Rohr- oder Kanalquerschnitte auf das Kreisrohr zurückgeführt werden.

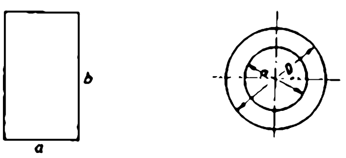

Abb. 6 und 7. Zur Berechnung des gleichwertigen Durchmessers

Betrachten wir nunmehr die Stoffübertragung, so können wir auch für diese dieselben Differentialgleichungen (Kontinuitätsgleichung, Bewegungsgleichung, Energiegleichung) aufstellen wie bei der Stoffübertragung. Gegenüber dieser besteht lediglich der Unterschied, daß an Stelle der Temperaturdifferenzen, die den Wärmetransport verursachen, nunmehr Druckdifferenzen treten, die den Stofftransport bewirken, und daß an Stelle der Temperaturleitfähigkeit a die Diffusionszahl k tritt. Sonst ist der mathematische Aufbau der Gleichungen genau derselbe. Sie müssen also auch identische Lösungen ergeben. An Stelle der Nusseltschen Kennzahl Nu tritt gemäß Gl. (9) bzw. (10) $\frac{\beta l}{k}$; die Reynoldssche Kennzahl Re bleibt bestehen und an Stelle der Prandtlschen Kennzahl Pr tritt die dimensionslose Kennzahl $\left(\frac{\nu}{k}\right)$. Man erhält also durch Anwendung der Ähnlichkeitstheorie eine Lösnng
$$\frac{\beta l}{k} = K Re^m \left(\frac{\nu}{k}\right)^n, \tag{25}$$
die in ihrer Form der Gl. (19) entspricht, wenn man Gr außer acht läßt, da es sich um eine erzwungene Strömung handelt. Für den Wärmeaustausch ergibt sich nach Gl. (19) eine Lösung mit denselben Konstanten K, m und n
$$\frac{\alpha l}{\lambda} = K Re^m Pr^n. \tag{26}$$
Nach Division von Gl. (26) durch Gl. (25) folgt
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda}{k}\left(\frac{k}{a}\right)^n, \tag{27}$$
wobei der Exponent n zu 0,8 abgeschätzt werden kann[5]. Damit ist die Stoffübergangszahl auf die Wärmeübergangszahl zurückgeführt. Ist die erstere bekannt, so kann die letztere nach Gl. (27) berechnet werden.

IV. Die Behandlung der Stoffübertragung mit Hilfe des J, x-Diagrammes

In der Praxis erweist es sich oft als zweckmäßig, das J,x-Diagramm[6] zur Behandlung der in Rede stehenden Probleme zu verwenden. Das ist ein Diagramm, das als schiefwinklige Ordinate die Enthalpie eines Gas-Dampf-Gemisches, z. B. feuchter Luft, enthält, wärend als Abszisse der Gehalt x des Gases an Dampf, also z. B. die Wasserdampfmenge je kg trockener Luft, aufgetragen ist. Ein solches Diagramm ist in Abb. 8 schematisch dargestellt.

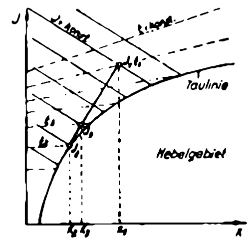

Abb. 8. Stoff- und Wärmeübertragung, dargestellt im J,x-Diagramm

Unterhalb der Taulinie fällt Wasser in Tröpfchen aus. Man befindet sich im Nebelgebiet. Oberhalb ist ein Luft-Dampf-Gemisch vorhanden. Die Isothermen gehen, wie dargestellt, fächerförmig auseinander.

Stellt man sich beispielsweise ein Stoffübertragungsproblem so vor, daß an einer gekühlten Wand aus einem Gemisch von trockener Luft und Wasserdampf der letztere auskondensiert wird, so kann man für übergehendes Dampfgewicht den Ansatz
$$G' = \sigma\,(x_F' - x_w')\,F \text{ kg/h} \tag{28}$$
machen, analog der Gl. (9). Drückt man auf Grund der Zustandsgleichung der Gase x_F' und x_w' durch den Druck P, P_F' und P_w' und die Gaskonstanten R' und R'' aus, wobei sich die erstere auf den Wasserdampf, die zweite auf Luft bezieht, so wird
$$G' = \sigma\frac{R''}{R'}\left(\frac{P_F'}{P-P_F'} - \frac{P_w'}{P-P_w'}\right)F. \tag{29}$$
Sind die Teildrücke P_F' und P_w' klein gegenüber dem Gesamtdruck P', so geht Gl. (29) in (9) über, wenn
$$\sigma = \beta\frac{P}{R''T} \tag{30}$$
mit T als absoluter Temperatur wird.

Ist, was für das technisch wichtige Gemisch Luft-Wasserdampf der Fall ist, $k/a \approx 1$, so kommt man nach Gl. (27) zu der Beziehung von Lewis

[5] Vgl. K. Nesselmann, *Die Grundlagen der angewandten Thermodynamik*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951, S. 308.

[6] M. Grubenmann, *J,x-Tafeln feuchter Luft*, Springer, Berlin 1942.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma\, c_p. \tag{31}$$

Setzt man ferner für das spezifische Gewicht des Gemisches angenähert $P/R''T$, d. h. das spezifische Gewicht des Gases (Luft) ein, so folgt

$$\sigma = \frac{\alpha}{c_p}\,, \tag{32}$$

ein sehr einfacher Zusammenhang. Für feuchte Luft ist $c_p \approx 0{,}25$, so daß $\sigma = 4\,\alpha$ wird.

Die einfache Beziehung (31) ist jedoch, wie ausdrücklich nochmals hervorgehoben werde, nur gültig, wenn $k/a \approx 1$ ist, was jedesmal zu prüfen ist.

In Abb. 8 sei Punkt 1 der Anfangszustand eines Gemisches mit der Enthalpie J_1, der Temperatur t_1 und der Feuchtigkeit x_1. An der gekühlten Oberfläche eines Rohres von der Temperatur t_2 durch das das Gemisch strömt, schlägt sich Wasser nieder und der Zustand an der Rohroberfläche entspricht dem Taupunkt bei t_2, der Enthalpie J_2 und der Feuchtigkeit x_2. Die Zustandsänderung des Gemisches geht dann angenähert nach der Geraden 1–2 vor sich. Wäre die Fläche unendlich groß, würde das Gemisch im Zustand 2 austreten. Bei endlicher Fläche wird z. B. nur der Zustand 3 erreicht. Aus dem Gemisch werden also je kg trockener Luft $(x_1 - x_3)$ kg Wasser ausgeschieden. Das Gemisch kühlt sich von t_1 auf t_3 ab und je kg trockener Luft ist die Wärmemenge $J_1 - J_3$ abzuführen[7].

Derartige J,x-Diagramme sind leicht auch für andere Stoffpaare zu entwerfen.

V. Stoffkonstanten

In den Kenngrößen zur Berechnung der technisch wichtigen Werte für α und β kommen Stoffkonstanten vor, nämlich die spezifische Wärme, das spezifische Gewicht, die Wärmeleitzahl und die Zähigkeit. Auf Grund der voraufgehenden Betrachtungen wurde erkannt, daß die laminare Grenzschicht maßgebend für den Wärme- und Stofftransport ist. Es sind daher für die Grenzschicht geltende Mittelwerte einzusetzen, also z. B. für die Zähigkeit

$$\nu_m = \frac{1}{t_F - t_w} \int_{t_w}^{t_F} \nu\, dt. \tag{33}$$

Indessen genügt häufig schon der arithmetische Mittelwert.

VI. Wärme- und Stoffübergang bei freier Strömung

Im Gegensatz zur erzwungenen steht die freie Strömung. Sie wird hervorgerufen durch örtliche Verschiedenheiten des spezifischen Gewichtes des strömenden Stoffes, z. B. durch örtlich verschiedene Temperaturen oder bei Gasen auch durch Unterschiede in den Molekulargewichten. Die Geschwindigkeit bei dieser Strömung, wobei als Beispiel das Aufwärtsströmen eines Gases an einer erwärmten vertikalen Platte diene, ist in der Regel so gering, daß die Beschleunigungskräfte vernachlässigt werden können. Dadurch fällt die REYNOLDSsche Kennzahl aus den Betrachtungen heraus, wohingegen die GRASHOFsche Kennzahl als Charakteristikum der freien Strömung hineinkommt. Man erhält also für den Wärmeübergang auf Grund von Gl. (19)

$$Nu = f\,(Pr;\, Gr). \tag{34}$$

Auf Grund theoretischer Erwägungen folgt

$$Nu = K_4 \sqrt[4]{Pr\, Gr}\,, \tag{35}$$

wobei die Konstante K_4 je nach dem vorliegenden geometrischen System (Rohr, Platte, Rohrbündel) verschieden ist.

Entsprechend ergibt sich für die Stoffübertragung

$$\frac{\beta\, l}{k} = K_4 \sqrt[4]{\left(\frac{\nu}{k}\right) Gr}, \tag{36}$$

so daß nach Division von Gl. (35) durch (36) die Beziehung

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda}{k} \sqrt[4]{\frac{k}{a}} \tag{37}$$

wieder die Stoffübergangszahl β auf die Wärmeübergangszahl α zurückführt.

Bezüglich der Konstanten K_4 für diese technisch weniger wichtige Strömungsart sei auf das eingangs erwähnte zusammenfassende Schrifttum verwiesen.

VII. Der physikalische Mechanismus des Wärme- und Stoffüberganges

Zur Berechnung der technisch wichtigen Werte für die Wärmeübergangszahl α und die Stoffübergangszahl β wurde bisher die Ähnlichkeitstheorie, also eine rein formale Methode, verwendet.

Es ist jedoch auch möglich, auf Grund physikalischer Überlegungen zum Ziel zu kommen[8]. Abb. 9 stellt die

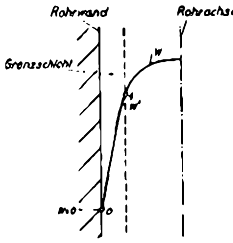

Abb. 9. Zur Erläuterung des physikalischen Mechanismus des Wärme- und Stoffüberganges

[7] Über die Berechnung der Flächen und Abweichung der Zustandsänderung von der Geraden vgl. K. NESSELMANN, Z. ges. Kälte-Ind. *48*, 181 (1941); E. HOFMANN, Z. ges. Kälte-Ind. *49*, 66 (1942).

[8] E. HOFMANN, Forschg. Ing.-Wes. *11*, 159 (1940); H. REICHARDT, Z. angew. Math. Mech. *20*, 297 (1940); H. REICHARDT, *Der Einfluß der wandnahen Strömung auf den turbulenten Wärmeübergang*, Mitt. Max-Planck-Institut Strömungsforsch. Nr. 3, Göttingen 1950.

eine Hälfte eines durch die Rohrachse gehenden Schnittes dar, wobei die mit w bezeichnete Kurve die Geschwindigkeitsverteilung zeigt, ähnlich wie Abb. 3. Die im Zusammenhang mit dieser Abbildung angestellten Betrachtungen sollen nunmehr verfeinert werden.

Die im turbulenten Kern rechts von 1 befindlichen makroskopischen Teilchen haben in axialer Richtung eine mittlere Geschwindigkeit w_m. Infolge der schon früher erwähnten radialen Komponenten gelangen solche Teilchen an den inneren Rand der Grenzschicht 0–1, wo die Geschwindigkeit $w' < w_m$ herrscht. Makroskopische Teilchen können in die Grenzschicht selbst nicht eindringen, weil hier keine radiale Komponente vorhanden ist. Es werden also dauernd Teilchen am Rande der Grenzschicht abgebremst, und die in den turbulenten Kern gelangenden Teilchen müssen beschleunigt werden. Die Menge der hin- und herwandernden Teilchen ist maßgebend für den Wärmetransport, weil die Temperatur im Kern von der Temperatur in Punkt 1 verschieden ist. Ist die Temperatur im Kern z. B. höher als in 1, so geben die Teilchen Wärme in Richtung der Wand ab. Im anderen Fall ist es umgekehrt.

Nun ist aber die Impulsänderung der beschleunigten Teilchen auch bestimmend für den Strömungswiderstand, der jedoch wiederum aus rein strömungstechnischen Überlegungen heraus berechenbar ist. Durch diese Kombination gelingt die Berechnung der Wärmeübergangszahl α auf Grund strömungstechnischer Betrachtungen, und man kommt beispielsweise für den Wärmeübergang im Rohr zu einer Gleichung von der Form[9]

$$Nu = 0{,}0396\, Pr \frac{Re^{3/4}}{1+1{,}74\, Re^{-1/8}\,(Pr-1)}. \qquad (38)$$

Sinngemäße Überlegungen gelten auch für den Stoffübergang.

Ob man die rein formale oder die auf physikalischen Überlegungen basierende Methode zur Berechnung von α bzw. β verwendet, ist Geschmackssache. Die erstere hat entschieden den Vorteil, daß die Gleichungen zur Zahlenrechnung geeigneter sind, die zweite, daß ihr physikalischer Inhalt befriedigender ist.

VIII. Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß Wärmeübergang und Stoffübergang im wesentlichen strömungstechnische Probleme sind. Die Berechnung der für die Praxis wichtigen Wärme- und Stoffübergangszahl wird in ihren Grundzügen sowohl nach der formalen Methode der Ähnlichkeitstheorie als auch auf Grund physikalischer Vorstellungen dargestellt. Die Stoffübergangszahl läßt sich, wie ebenfalls gezeigt wird, auf die Wärmeübergangszahl zurückführen. Für die kritische Beurteilung von Wärme- und Stoffübergangsproblemen, die in der chemischen Verfahrenstechnik auf Schritt und Tritt auftauchen, ist zur Vermeidung von Fehlschlägen die Kenntnis der physikalisch-mathematischen Grundlagen von Wichtigkeit.

[9] L. PRANDTL, Physik. Z. *11*, 1072 (1910), und *29*, 487 (1928).