Warum Substitutionswägung?

Von Dr. Ing. L. Biétry, Zürich

Der heutige Stand der chemischen Forschung stellt an ihre technischen Hilfsmittel höchste Anforderungen. Dies gilt im besonderen für alle Instrumente, die der exakten Gewichtsbestimmung dienen, muß doch für Mikroanalysen eine zuverlässige Genauigkeit bei Differenzwägungen in der Größenordnung von Millionstelgrammen verlangt werden. Selbst für Halbmikro- und Makroanalysen muß noch auf Hunderstel- bzw. Zehntelmilligramme genau gewogen werden können, wobei sich auch die Reproduzierbarkeit der Resultate zumindest innerhalb dieser Grenzen halten muß.

Im Gegensatz zu rein optischen Meßinstrumenten, wie z. B. Spektrophotometern, stellt nun aber selbst eine moderne Analysenwaage mit optischer Gewichtsanzeige immer noch prinzipiell ein mechanisches System dar. Ihre Genauigkeit bleibt deshalb vor allem abhängig von der eindeutigen Definition und Aufrechterhaltung bestimmter physikalischer und geometrischer Größen und deren Verhältnisse zueinander.

Es kann dem Chemiker deshalb nicht gleichgültig sein, ob sein persönlicher Arbeitsaufwand durch unzulängliche mechanische Hilfsmittel unter Umständen zunichte gemacht wird. Es liegt daher durchaus in seinem Interesse, sich über die theoretischen Grundlagen des Waagenbaus und die sich daraus ergebenden Konsequenzen bei der Wahl eines Waagentyps immer wieder Rechenschaft zu geben. Die nachfolgenden Gedanken haben zum Ziel, ihm dabei behilflich zu sein.

1. Die Gewichtsbestimmung

Zweck einer Wägung ist, die Masse M_x eines Körpers zu bestimmen. Da aber die Masse eines solchen Körpers sich nur auf dem Umweg über ihre Auswirkung, d. h. durch die Kraft, mit der sie vom Erdmittelpunkt angezogen wird, messen läßt, führt jede Wägung notwendigerweise zu einem Vergleich von Kräften.

Bei einer Federwaage (Abb. 1) wird die Schwerkraft eines Körpers mit der Federkraft F_f verglichen, wobei die Federkraft aber nur im Idealfall proportional mit der Längenänderung der Feder zunimmt. Bei der Federwaage stehen sich also zwei Kräfte zum Vergleich gegenüber, deren Ursachen nicht im gleichen Phänomen liegen.

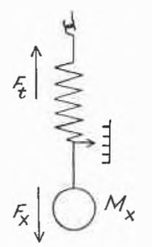

Abb. 1

Eine Federwaage wird daher auch nicht an jedem Punkt der Erde das gleiche Resultat zeigen, da die Schwerkraft des Körpers mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt ändert, die Federkraft dagegen vom Standort unabhängig konstant bleibt. Die sich ergebenden Differenzen sind in der Regel allerdings so gering, daß die Federwaage dank einiger besonderer Vorzüge ihren Platz unter den Waagentypen berechtigterweise immer behaupten wird.

Will man jedoch den für jeden Vergleich gültigen Grundsatz verwirklichen, daß nur *Gleiches mit Gleichartigem verglichen* werden soll, so ist man gezwungen, die unbekannte Schwerkraft eines Körpers F_x mit der bekannten Schwerkraft eines Kontrollkörpers F_k, d. h. einem Kontrollgewicht, zu vergleichen. Da ein direkter Vergleich von Massenkräften aber nicht möglich ist, sondern mittels eines Hebelsystems erfolgen muß, kommt man schließlich zu einem *Vergleich von Drehmomenten.*

Abb. 2

Abb. 2 zeigt das Prinzip der Balkenwaage, bei der die unbekannte Massenkraft das Drehmoment $F_x \cdot a$ erzeugt, das mit dem Drehmoment der bekannten Massenkraft $F_k \cdot a$ verglichen wird; in bezug auf den gemeinsamen Drehpunkt ergibt sich die Momentengleichung:

$$F_x \cdot a = F_k \cdot a.$$

Aus dieser Gegenüberstellung geht hervor, daß ein «Gleichgewicht» des Balkens nur dann gleichen Gewichten entspricht, wenn auch die beiden als Hebel wirksamen Balkenarme a absolut gleich lang sind. In der Praxis läßt sich diese absolute Übereinstimmung der beiden Hebellängen aber schon aus fertigungstechnischen Gründen nur annähernd erzielen. Beim Gebrauch der Waage ist überdies eine Veränderung im Längenverhältnis der Balkenarme nicht zu vermeiden. Als Folge tritt im Drehpunkt ein Fehlerdrehmoment auf, das proportional der Längendifferenz beider Hebelarme ist.

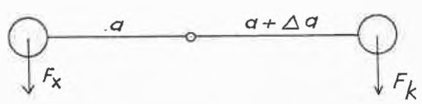

Abb. 3

Ist z. B. der Hebelarm rechts um Δa länger als der Hebelarm links (Abb. 3), so ergibt sich folgende Drehmomentengleichung:

$$F_x \cdot a = F_k \cdot (a + \Delta\, a).$$

Die Massenkraft F_k erscheint deshalb um den Betrag $\Delta a \cdot F_k$ zu groß. Man spricht in diesem Falle von einem Hebelfehler von der Größe:

$$\text{Hebelfehler} = F_k \cdot \Delta\, a.$$

Diese Gleichung sagt nun aber auch aus, daß sich das Fehlerdrehmoment je nach Belastung der Waage ändert. Es wird größer beim Vergleich großer Massen und umgekehrt.

Man versucht in der Praxis, dieses Fehlerdrehmoment zu kompensieren, indem man mit einer Justierschraube ein entsprechendes Gegenmoment erzeugt. Abb. 4 zeigt die auf diese Weise geschaffene Situation:

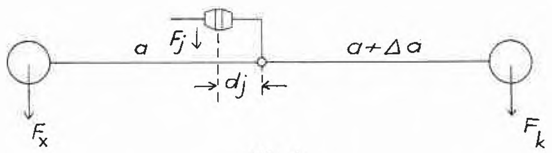

Abb. 4

Die Gleichung der beiden Drehmomente erhält nun folgende Form:

$$F_j \cdot d_j = F_k \cdot \Delta\, a.$$

Die linke Seite dieser Gleichung bleibt konstant, denn das Justiergewicht F_j und dessen einmal eingestellter Abstand d_j vom Drehpunkt bleiben von sich aus unverändert. Die rechte Seite der Gleichung hingegen verändert ihren Wert je nach Belastung F_k der Waage. Es folgt daraus, daß *die Einstellung der Justierschraube jeweils nur für einen im voraus bekannten Belastungsfall Gültigkeit hat.*

Da aber der Umfang der Belastung der Waage zur Bestimmung der unbekannten Schwerkraft F_x eines Körpers nicht im voraus bekannt ist, wird normalerweise die Justierschraube bei unbelasteter Waage eingestellt (Nullpunkteinstellung), wobei die entsprechende Korrektur aber nur für die unbelastete Waage gültig ist. Nach Auflegen des Wägegutes und der Gewichte tritt nämlich wieder ein Fehlerdrehmoment auf, dessen Größe der jeweiligen Belastung einer Schale, multipliziert mit der Längendifferenz der Hebelarme, entspricht.

Will man deshalb mit Hilfe der Justierschraube eine für jeden Belastungsfall wirksame Korrektur vornehmen, muß folglich auch die rechte Seite der Gleichung konstant gemacht werden. Dies ist nur möglich, wenn das Kontrollgewicht F_k unverändert bleibt, was bedeutet, daß die Waage im vollen Umfang ihres Wägebereiches vorbelastet werden muß.

Diese Forderung nach einer konstanten Belastung der Waage und damit einem konstanten, für jeden Belastungsfall gültig korrigierbaren Fehlerdrehmoment führt zwingend zum Prinzip der Substitutionswägung (Abbildung 5).

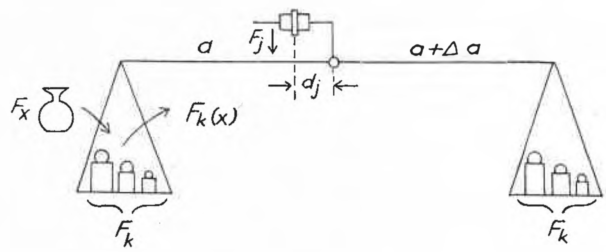

Abb. 5

Bei der Substitutionswägung werden zunächst beide Schalen voll belastet. Soll nun das unbekannte Gewicht des Körpers F_x bestimmt werden, so legt man ihn auf die Schale links und nimmt von dort so viele Gewichte weg, bis sich wieder ein Gleichgewicht einstellt, d. h. bis sich der Balken auf den geeichten Neigungsbereich einspielt.

Die Drehmomentengleichung lautet dann:

$$[F_k + F_x - F_{k\,(x)}]\, a + F_j \cdot d_j = F_k\,(a + \Delta\, a\,).$$

Umgeformt ergibt sich:

$$F_x - F_{k\,(x)} = \frac{F_k \cdot \Delta\, a - F_j \cdot d_j}{a}.$$

Der Ausdruck rechts wird zu Null, weil das Fehlerdrehmoment $F_k \cdot \Delta a$ und das Korrekturdrehmoment $F_j \cdot d_j$ gleich groß sind. Da beide in jedem Belastungsfall innerhalb des Wägebereiches konstant bleiben, erhält man die Beziehung:

$$F_x = F_{k\,(x)}.$$

Die Waage wird damit vollständig unabhängig von der jeweiligen Größe des unbekannten Gewichtes F_x. Man kann diese Gleichung auch so interpretieren, daß *Gewichtssatz und Wägegut am gleichen Hebelarm hängen* und somit unabhängig von dessen Länge miteinander verglichen werden.

Erst mit der Substitutionswägung wird man also der eingangs gestellten Forderung, daß *Gleiches mit Gleichartigem* verglichen werden soll, vollständig gerecht. Die großen Vorteile der Substitutionswägung sind schon sehr lange bekannt. Die Methode setzte sich aber bis vor kurzem nicht durch, da die klassische Drei-Schneiden-Waage für den Vergleich von Wägegut und Gewichten an zwei verschiedenen Hebelarmen konzipiert ist. Die Durchführung einer Substitutionswägung an einer solchen Waage ist deshalb umständlich und zeitraubend. Drei-Schneiden-Waagen sind auch nicht für eine dauernde Vollbelastung gebaut, so daß man möglicherweise befürchtete, ihre Lagerstellen würden durch eine solche Belastung auf Kosten der Empfindlichkeit zu stark beansprucht.

2. Die Empfindlichkeit

Unter der Empfindlichkeit einer Waage versteht man die Größe des Ausschlages der Anzeigevorrichtung, der sich bei einer bestimmten Gewichtsdifferenz ergibt. Sie wird ausgedrückt in Skalenteilen Ausschlag pro Milligramm Gewichtsdifferenz und wird oft als Kriterium für die Qualität einer Waage mißbraucht. Genau besehen handelt es sich aber bei der Empfindlichkeit einer Balkenwaage lediglich um die Größe des Differenzdrehmomentes, das nötig ist, um den Balken um einen Teilstrich der Skala zu bewegen.

In der Gleichgewichtslage des Balkens stellen sich diesem bewegenden Drehmoment M_d zwei Drehmomente, das Reibungsmoment Md_r und das stabilisierende Moment Md_s entgegen, gemäß der Gleichung:

$$Md = Md_r + Md_s.$$

Um diese Momente in ihrer Auswirkung auf die Empfindlichkeit besser beurteilen zu können, ist es vorteilhaft, sie einmal gesondert zu betrachten:

a) Zur Bestimmung des *Reibungsmomentes* ist man bei oberflächlicher Betrachtung zunächst geneigt, die Reibung einer Lagerstelle als nur vom Lagerdruck und damit in unserem Falle von der Belastung der Waage abhängig zu betrachten. Diese Überlegung erfaßt aber nur einen geringen Teil der für die Reibung verantwortlichen Ursachen.

Da es sich bei Schneidenlagern um Lager handelt, die den Gesetzen der Rollreibung unterworfen sind, ist es nicht abwegig, zum Vergleich die Vorgänge beim Abrollen eines Fahrzeugreifens heranzuziehen. Bei einem Fahrzeugreifen spielt es sicher auch eine Rolle, wie groß das Gewicht des Fahrzeuges ist. Die Härte des Reifens, also sein innerer Druck, ferner sein Material und dessen innere Struktur (Luft oder Vollgummi) sowie das Reifenprofil und schließlich auch der Reibungskoeffizient Reifen zu Unterlage spielen aber eine mindestens ebenso bedeutende Rolle.

Auf das Schneidenlager angewendet, würde dies bedeuten, daß, neben der spezifischen Belastung der Schneiden, auch die Elastizitätsziffern, die Oberflächenbeschaffenheit und der Reibungskoeffizient weitgehend mitbestimmend sein müssen.

Eine Gleichung, die die Abhängigkeit der Reibung von diesen verschiedenen Teilursachen ausdrücken sollte, kann nur qualitativen Charakter haben und dürfte folgendermaßen aussehen:

$$Md_r = f(P, \varepsilon, k_b, \sigma).$$

P = spezifische Belastung der Schneiden
ε = Elastizitätsziffer
k_b = Bearbeitungsfaktor
σ = Reibungskoeffizient

Mit Ausnahme des Lagerdruckes sind nun aber alle übrigen Größen zahlenmäßig sehr schwer erfaßbar und machen dadurch eine Berechnung der effektiven Reibung zu einer äußerst problematischen Angelegenheit.

Man ist daher bei der Forschung weitgehend auf praktische Versuche angewiesen, und es bleibt somit auch der Geschicklichkeit des Herstellers einer Waage vorbehalten, neben einer Reduktion der spezifischen Schneidenbelastung auf konstruktivem Wege auch durch die Wahl geeigneter Materialien und deren Verarbeitungsmethoden die günstigsten Voraussetzungen für eine möglichst geringe Reibung zu schaffen.

b) Unter dem *stabilisierenden Moment* versteht man das Drehmoment, das den Waagebalken immer wieder in eine stabile Ruhelage zu bringen versucht. Die Lage des Balkens in Abb. 6 ist z. B. rein durch den Zufall bestimmt.

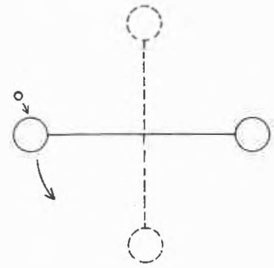

Abb. 6

Er befindet sich in einem labilen Gleichgewicht und zeigt bei der geringsten Überlast auf einer Seite die Tendenz, in eine stabile Endlage (gestrichelte Linie) überzugehen. Ein solches Hebelsystem ist aber als Waage unbrauchbar, da ein Vergleich von Drehmomenten an einem derart «überempfindlichen» System unmöglich ist.

Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, verlegt man den Systemschwerpunkt unterhalb den Drehpunkt und macht so den Balken zum Pendel. Dabei kommt man im allgemeinen zu einer Anordnung, wie sie in Abb. 7 dargestellt ist:

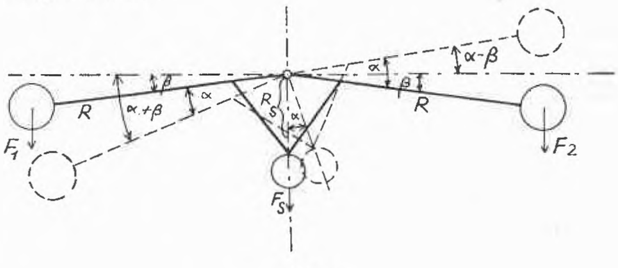

Abb. 7

Die Drehmomentengleichungen, auf dieses System angewendet, lauten:

$$Md_1 = F_1 \cdot R \cdot \cos(\alpha + \beta),$$
$$Md_2 = F_2 \cdot R \cdot \cos(\alpha - \beta),$$
$$Md_s = F_s \cdot R_s \cdot \sin \alpha.$$

In jeder Gleichgewichtslage des Balkens ist die Summe dieser drei Drehmomente gleich Null. Löst man die sich ergebende Gleichung auf die Gewichtsdifferenz F_1–F_2 hin auf, so erhält man folgende Beziehung:

$$\frac{F_1 - F_2}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{F_s \cdot R_s}{R \cdot \cos \beta} + (F_1 + F_2) \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß bei kleinen Winkeln $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$ ist, stellt sich die Beziehung wie folgt dar:

$$\frac{\text{Stabilisierendes Moment}}{\text{Balkenausschlag}} =$$

$$= \frac{F_1 - F_2}{\alpha} = \frac{F_s \cdot R_s}{R \cdot \cos \beta} + (F_1 + F_2) \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß das stabilisierende Drehmoment einer Waage im allgemeinen von ihrer Gesamtbelastung $F_1 + F_2$ abhängig ist. Das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung bringt dies sehr anschaulich zum Ausdruck.

Will man deshalb das stabilisierende Moment einer Waage von deren variabler Gesamtbelastung unabhängig machen, so stehen prinzipiell folgende zwei Wege offen:

a) Man sorgt dafür, daß der Winkel β gleich Null wird, d.h. man bringt die drei Drehpunkte der beiden Gehänge und des Balkens, also die beiden Außenschneiden und die Mittelschneide, auf eine absolut gerade Linie, oder

β) man hält die Belastung $F_1 + F_2$ konstant.

Die erste Forderung läßt sich in der Praxis nicht erfüllen, da infolge Abnützung der Schneiden oder Durchbiegen des belasteten Balkens früher oder später immer Abweichungen der drei Drehpunkte von einer Geraden auftreten.

Die Erfüllung der zweiten Forderung führt aber automatisch wieder zum Prinzip der Substitutionswägung, da nur bei dessen Anwendung der zweite Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung gesamthaft konstant wird.

Betrachtet man also den Begriff der *Empfindlichkeit* zusammenfassend, so kann man für diese Größe folgende qualitative Gleichung aufstellen:

$$\text{Empfindlichkeit} =$$

$$= \pm f(P, \varepsilon, k_b, \sigma) + \frac{F_s \cdot R_s}{R \cdot \cos \beta} + (F_1 + F_2) \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

In allen Fällen, wo nicht nach dem Substitutionsprinzip gewogen wird, *verändern sich also sowohl der Reibungsanteil als auch der stabilisierende Anteil der Empfindlichkeit mit der variablen Belastung einer Waage.*

Bei der Substitutionswägung wird demgegenüber der Reibungsanteil infolge des durch die konstante Belastung $F_1 + F_2$ ausgeübten konstanten Lagerdruckes zur definierten Größe. Gleichzeitig hält die konstante Belastung auch das stabilisierende Moment für jeden Wägefall konstant.

Es ist daher nur bei der Substitutionswägung möglich, die Empfindlichkeit als definierte Instrumentenkonstante zu betrachten. Dabei hat man es in der Hand, durch Verkleinerung des Abstandes R_s, also durch Höherlegen des Systemschwerpunktes mittels der Empfindlichkeitsschraube, diese konstante Empfindlichkeit beliebig einzustellen.

3. Die Substitutionswaage

Genaue Wägungen sind also nur unter Anwendung des Substitutionsprinzips möglich. Wie bereits festgestellt, entspricht die Substitutionswägung aber nicht der ursprünglichen Zweckbestimmung der klassischen Drei-Schneiden-Waage.

Die volle Ausnutzung der mit diesem Wägeprinzip verbundenen Vorteile erforderte deshalb die Entwicklung einer speziellen Substitutionswaage, bei der Wägegut und Gewichtsatz konstruktiv bedingt an einem Hebelarm und bei konstanter Belastung des Systems miteinander verglichen werden.

Gleichzeitig konnte, durch Einführung des ungleicharmigen Balkens, die Totalbelastung $F_1 + F_2$ der Waage reduziert werden (Abb. 8).

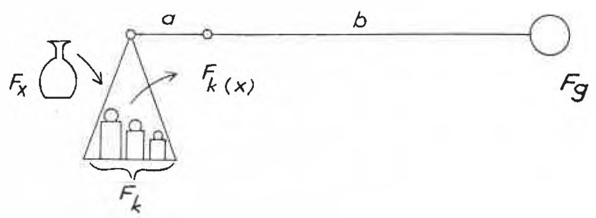

Abb. 8

Berücksichtigt man nämlich, daß eine Balkenwaage eigentlich Drehmomente vergleicht, lag die Lösung nahe, durch Verlängerung des rechten Hebelarmes die Größe der Vergleichsmasse F_g rechts zu reduzieren.

Die Drehmomentengleichung lautet in diesem Falle:

$$[F_x + (F_k - F_{k\,(x)})]\, a = Fg \cdot b.$$

Bei einer Verlängerung des Hebelarms b auf den dreifachen Wert gegenüber dem Hebelarm a ergibt sich nämlich, bei gleichwertigen Drehmomenten, eine Totalbelastung von nur $F_1 + F_2 = 1\,{}^1\!/_3\, F_1$ gegenüber einer Totalbelastung von $2\, F_1$ bei einer gleicharmigen Waage.

Die Bedenken, daß durch die asymmetrische Ausbildung des Balkens dessen Nullpunktlage temperaturabhängig würde, sind absolut unbegründet, da sich ja beide Arme bei einer gleichmäßigen Erwärmung proportional ihrer Länge ausdehnen, wobei das Verhältnis der Hebellängen zueinander gleich bleibt. Die Nullpunktlage ist aber ausschließlich durch dieses gleichbleibende Hebellängenverhältnis bestimmt. Nur bei ungleichmäßiger Erwärmung des Balkens ergäbe sich eine Veränderung der Nullpunktlage, niemals aber ein Fehler in der Gewichtsanzeige.

Eine Konstruktion, die sich auf dem Prinzip der Substitutionswägung aufbaut, gestattet ferner, eine der beiden Außenschneiden durch das mit dem Balken starr verbundene Gegengewicht zu ersetzen. Es reduziert sich somit die Zahl der Lagerstellen von 3 auf 2, was sich auf die Reproduzierbarkeit der Resultate günstig auswirkt.

Zusammenfassung

Eine genaue Wägung setzt voraus, daß Wägegut und Vergleichsgewicht unter absolut gleichen Bedingungen verglichen werden.

Dieser Gedanke führt zur Substitutionswägung, weil bei diesem Prinzip beide Massen am gleich Hebelarm verglichen werden.

Das Substitutionsprinzip führt zum Prinzip der konstanten Belastung.

Bei näherer Betrachtung erweist sich auch diese konstante Belastung als Vorteil. Sie ist Voraussetzung für eine konstante Empfindlichkeit, denn sowohl die Lagerreibung als auch die Lage des eindeutig definierten Schwerpunktes können nur dann konstant gehalten werden, wenn die Waage konstant belastet ist.

Die konsequente Ausnutzung der durch das Substitutionsprinzip gebotenen Vorteile ist aber nur mit einer dafür eigens konstruierten Waage mit ungleich langen Balkenarmen möglich.

Eine unerwünschte Temperaturabhängigkeit der Nullpunktlage tritt auch bei ungleich langen Balkenarmen nicht ein, da sich ja beide Arme proportional ihrer Länge ausdehnen und somit auch das für die Nullpunktkonstanz entscheidende Längenverhältnis bei jeder Temperatur gleich bleibt.

Die Verwendung eines mit dem Balken starr verbundenen Gegengewichtes anstelle der dritten Schneide hat überdies einen günstigen Einfluß auf die Reproduzierbarkeit der Resultate.