Zur Bestimmung relativer Farbstoffstärken auf farbmetrischem Wege

Von U. Gugerli

Sandoz AG, Physikalisch-chemisches Laboratorium des Farbendepartements

Einleitung

Die Beziehungen zwischen der Konstitution organischer Verbindungen und ihrem Absorptionsspektrum in Lösung im ultravioletten und sichtbaren Gebiet sind heute einigermaßen übersehbar. Das Lösungsspektrum ist eine absolute, präzis reproduzierbare und substanzspezifische optische Eigenschaft, und als solche ist es bei Forschungs- und Entwicklungsarbeiten auf dem Gebiet der technischen Farbstoffe zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden. Für die Praxis der farbstoffverbrauchenden Industrie besitzt das Lösungsspektrum dagegen eine nur mittelbare Bedeutung. Für die Applikation der Farbstoffe interessieren in erster Linie die *Oberflächenfarben,* die sich mit ihrer Hilfe erzielen lassen.

Der Begriff der Farbe ist physiologischer Natur. Für die wissenschaftliche Disziplin, welche auf einer absoluten und quantitativen Fassung des in diesem physiologischen Sinne verstandenen Begriffes der Farbe aufbaut, hat man sich im deutschen Sprachgebiet auf den Terminus *Farbmetrik* geeinigt, und es ist das Ziel dieser Arbeit, an einem Beispiel zu zeigen, welcher Art die Probleme sind, die sich auf dem Gebiet der Farbmetrik stellen.

Problemstellung

Als Beispiel eines Problems, das in der koloristischen Praxis eine eminente Bedeutung besitzt, und das mit den objektiven und quantitativen Mitteln der Farbmetrik angegangen werden kann, soll im folgenden das

Problem der *Bestimmung relativer Farbstoffstärken* aufgegriffen werden. Es handelt sich dabei um folgende Aufgabe: Gegeben seien zwei Farbstoffe A und B, deren Lösungsspektren nicht oder doch nicht genau übereinstimmen und die infolgedessen Färbungen liefern, die in der Nuance mehr oder weniger stark abweichen. Gesucht sei die relative Stärke oder Ausgiebigkeit des Farbstoffs B in bezug auf den Farbstoff A. Diese relative Farbstoffstärke wird unten noch genauer definiert werden. Sie wird meist in Prozenten angegeben. Ist der Farbstoff B beim Färben doppelt so ausgiebig wie der Farbstoff A, dann besitzt er eine relative Farbstoffstärke von 200%.

Die Bestimmung relativer Farbstoffstärken ist eine Aufgabe, die sich in einem farbstofferzeugenden Betrieb und in der Färbereipraxis täglich zu Dutzenden von Malen stellt, und die Genauigkeit und Zuverlässigkeit ihrer Lösung hat Geldeswert. Wir haben nun einen routinemäßig gangbaren Weg zur Lösung dieser Aufgabe mit den Mitteln der Farbmetrik gesucht, wobei neben der relativen Farbstoffstärke auch die Größe und die Art der Nuancenabweichungen interessierten.

Bevor auf eine quantitative Diskussion dieses Problems eingetreten werden kann, muß zunächst ganz kurz von farbmetrischen Koordinatensystemen die Rede sein.

Farbmetrische Koordinatensysteme

Es zeigt sich, daß das Verhalten des menschlichen Auges beim Farbensehen dadurch beschrieben werden kann, daß man ihm drei Empfänger mit verschiedenen spektralen Empfindlichkeitsfunktionen $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ und $\bar{z}(\lambda)$ zuschreibt (Abb. 1). Diese beruhen auf einem umfangreichen Beobachtungsmaterial. Sie definieren einen *Normalbeobachter*.

Die Erregung der drei Empfänger bei der Wahrnehmung einer Körperfarbe wird durch ein Zahlentripel X, Y, Z beschrieben. Diese drei sogenannten *Normfarbwerte* oder *Normvalenzen* sind durch drei Integrale definiert:

$$X = \int_{400}^{700} \bar{x}(\lambda)\, R(\lambda)\, E(\lambda)\, d\lambda\,, \qquad (1)$$

$$Y = \int_{400}^{700} \bar{y}(\lambda)\, R(\lambda)\, E(\lambda)\, d\lambda\,, \qquad (1')$$

$$Z = \int_{400}^{700} \bar{z}(\lambda)\, R(\lambda)\, E(\lambda)\, d\lambda\,, \qquad (1'')$$

in denen die normierte spektrale Energieverteilung der Lichtquelle $E(\lambda)$, die Remissionsfunktion $R(\lambda)$ der gefärbten Oberfläche und der durch die Normspektralwertfunktionen $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ und $\bar{z}(\lambda)$ definierte Normalbeobachter enthalten sind.

Die Normfarbwerte können aus der gemessenen Remissionsfunktion berechnet werden, wobei man häufig Analogie- oder Digitalrechengeräte einsetzt. Abb. 2 zeigt das registrierende HARDY-General-Electric-Spektralphotometer. Mit diesem Gerät können Remissionsspektren aufgenommen und mit einem eingebauten Analogierechengerät simultan integriert werden.

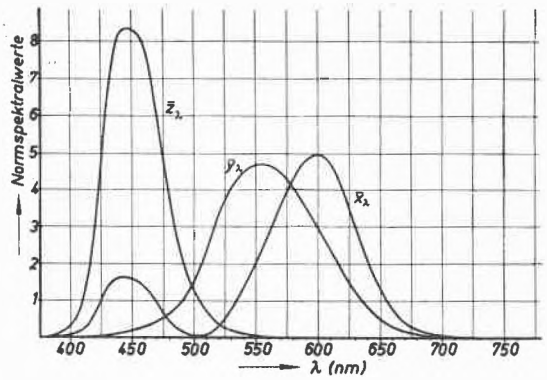


Abb. 1. Normspektralwertkurven für das energiegleiche Spektrum

Das Zahlentripel X, Y, Z charakterisiert eine Körperfarbe objektiv und umkehrbar eindeutig, und jeder Körperfarbe läßt sich ein und nur ein Raumpunkt zuordnen. Bildet man die gesamte dreidimensionale Mannigfaltigkeit aller Körperfarben auf einen Raumbereich



Abb. 2. General-Electric-Spektralphotometer mit Analogie-Integrator

ab, dann nennt man die Menge dieser Bildpunkte einen *Farbkörper*. Die Normvalenzen X, Y und Z definieren den Normvalenz-Farbkörper (Abb. 3). Die Koordinate Y mißt die Helligkeit und wird *Hellbezugswert* genannt.

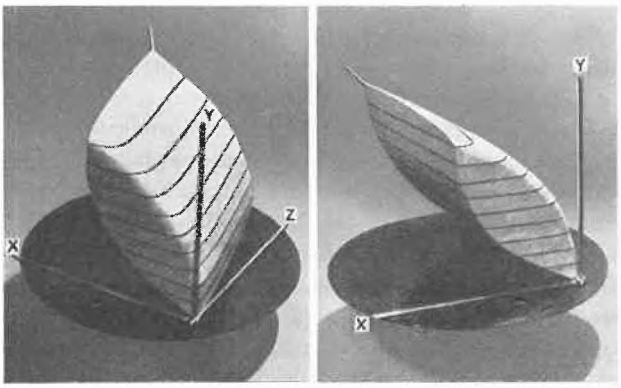


Abb. 3. Normvalenz-Farbkörper

Wie aus der Definition der Normfarbwerte hervorgeht, ist der höchste Punkt des Farbkörpers der Ort des Idealweiß. Im Ursprung des Koordinatensystems liegt der ideale Schwarzpunkt, und auf der in Abb. 3 angedeuteten Achse sind die unbunten Farben abgebildet, für welche alle drei Normfarbwerte gleich sind. Im übrigen ist der Normvalenz-Farbkörper, im koloristischen Sinne, leider denkbar unanschaulich. Seine entscheidende Schwäche liegt aber nicht darin, sondern anderswo.

Wohl liefert das Normvalenzsystem nämlich eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von Farbempfindungen und Raumpunkten, doch sind die Beziehungen zwischen den Bildpunkten empfindungsmäßig verzerrt. Das ist solange nicht schlimm, als man die Farbmetrik allein im Sinne einer quantitativen Farbsprache anwendet. Treten aber Toleranzprobleme hinzu, dann müssen auch die Beziehungen zwischen den Bildpunkten empfindungsmäßig richtig sein. Ein Koordinatensystem, das diese Bedingung erfüllt, heißt ***empfindungsmetrisch.***

Ein streng empfindungsmetrisches System existiert zurzeit noch nicht, doch liegt eine ganze Anzahl von voll- oder halbempirischen Näherungen vor, von denen allerdings keine den Ansprüchen der Praxis voll gerecht wird. Drei davon sollen im folgenden kurz erwähnt werden.

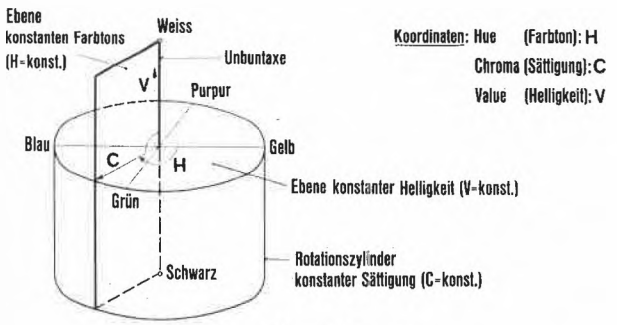


Abb. 4. Munsell-System

Im *Munsell-System* (Abb. 4) werden die Körperfarben durch das Koordinatentripel *Hue (H), Chroma (C)* und *Value (V)* beschrieben. Diese drei Koordinaten sind Funktionen der drei Normfarbwerte. Das Munsell-System ist im wesentlichen ein Zylinderkoordinatensystem mit koordinatenweise empfindungsmäßig verschiedenen Maßstäben. Die Koordinaten sind, im koloristischen Sinne, anschaulich. Die unbunten Farben von Weiß bis Schwarz werden in eine Gerade – die Unbuntachse – abgebildet. Farben gleicher Helligkeit besitzen gleiche Values und werden in Ebenen abgebildet, die senkrecht auf der Unbuntachse stehen. Farben gleichen Farbtons werden in eine Ebene abgebildet, in der die Unbuntachse liegt, und Farben gleicher Sättigung werden in eine Rotationszylinderfläche abgebildet, deren Achse mit der Unbuntachse zusammenfällt. Ausgesprochen bunte Farben besitzen ein hohes Chroma und werden in großer Entfernung von der Unbuntachse abgebildet. Trübe Farben, wie Braun und Olive, haben Bildpunkte in der Nähe der Unbuntachse.

Für das folgende besonders interessant ist die Value-Skala. Diese Koordinate ist eine Funktion des Hellbezugswertes Y allein. In Abb. 5 ist der Zusammenhang zwischen der empfindungsmetrischen Koordinate V und der valenzmetrischen Koordinate Y graphisch dargestellt. Die untere gestrichelte Linie entspricht dem als Näherung gelegentlich verwendeten Zusammenhang $V = \sqrt{Y}$, und die obere gestrichelte Kurve entspricht der Näherung $V = \log Y$, die dem Weber-Fechnerschen Gesetz entspricht. Die empirischen Daten liegen zwischen diesen Näherungen und können durch ein Polynom fünften Grades bestmöglich beschrieben werden:

$$Y = \sum_{\nu=1}^{5} a_\nu \cdot V^\nu, \qquad (2)$$

worin
$$a_1 = 1{,}2219,$$
$$a_2 = -0{,}23111,$$
$$a_3 = 0{,}23951,$$
$$a_4 = -0{,}021009,$$
$$a_5 = 0{,}0008408.$$

Diese von D. B. Judd u. a.[1] vorgeschlagene Funktion ist in Abb. 5 graphisch dargestellt.

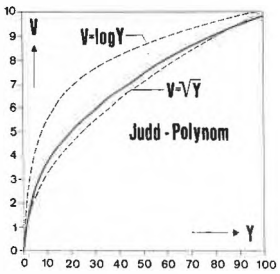


Abb. 5. Beziehungen zwischen der valenzmetrischen Koordinate Y (Hellbezugswert) und der empfindungsmetrischen Koordinate V (Munsell Value)

Als weitere, teilweise empfindungsmetrische Näherung sei das Koordinatensystem erwähnt, das von Richter vorgeschlagen und unter dem Namen *DIN-System* bekanntgeworden ist[2]. Die drei verwendeten Koordinaten sind anschaulich: der *Farbton T*, die *Sättigungsstufe S* und die *Dunkelstufe D*. Diese drei Koordinaten können aus den Normfarbwerten mit Hilfe graphischer Darstellungen gewonnen werden. Der entsprechende Zeitaufwand ist allerdings beträchtlich.

Bei der Auswahl einer empfindungsmetrischen Näherung für unsere eigenen Zwecke haben wir besonders darauf geachtet, daß die empfindungsmetrischen Koordinaten aus den gemessenen Normfarbwerten X, Y und Z einfach und rasch, wenn möglich auf rein analytischem Wege, zugänglich sind. Als einziges System, das diese Forderung erfüllt und das mit einem geringen Arbeits- und Zeitaufwand für die Transformation eine

[1] S. M. Newhall, D. Nickerson und D. B. Judd, *J. Opt. Soc. Amer.* *33* (1943) 417.
[2] DIN 6164.

akzeptable empfindungsmetrische Richtigkeit vereinigt, bot sich das «*Chromatic Value*»-System von E. Q. ADAMS[3] an. Verwendet man, nach einem Vorschlag von DOROTHY NICKERSON[4], die Munsell-Value-Koordinate mit einem passenden Skalennormierungsfaktor als dritte Koordinate, dann entsteht ein in brauchbarer Näherung empfindungsmetrisches System. Für die Zwecke der Praxis erwies es sich als angezeigt, einige Modifikationen am ursprünglichen System von ADAMS und NICKERSON anzubringen, auf deren Berechtigung indessen in diesem Rahmen nicht näher eingetreten werden kann. Sie ergeben sich aus der Definition der von uns verwendeten Koordinaten:

$$A_1 = -16\,[V(Z_c) - V(Y)] \qquad (3)$$

$$A_2 = -40\,[V(X_c) - V(Y)] \qquad (3')$$

$$A_3 = 9{,}2 \cdot V(Y)\,, \qquad (3'')$$

worin $V(X_c)$, $V(Y)$, $V(Z_c)$ } Lösungen des JUDD-Polynoms

und worin X_c, Y und Z_c auf Lichtquelle C und Mittelpunktsvalenz C bezogen sind.

Die Basis bildet ein kartesisches Koordinatentripel A_1, A_2, und A_3 (Abb. 6). Die Koordinate A_3 mißt die

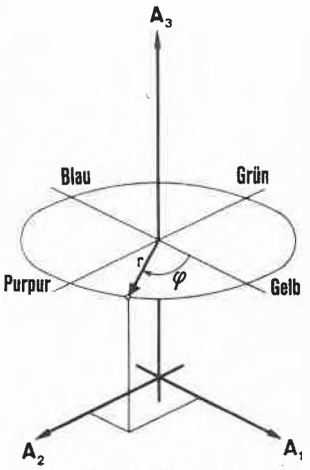


Abb. 6. A-System

Helligkeit. Die A_3-Achse ist der Ort der unbunten Farben. Innerhalb der Ebenen konstanter Helligkeit können zur Veranschaulichung Polarkoordinaten eingeführt werden:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1} \quad \varphi\text{: Farbtonkennzahl.} \qquad (4)$$

$$r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad r\text{: Sättigungskennzahl.} \qquad (5)$$

Der Radiusvektor r mißt die Sättigung, und dessen Argument φ ist ein Maß für den Farbton. Das Koordinatentripel φ, r, A_3 definiert ein Zylinderkoordinatensystem, ähnlich dem Munsell-System.

[3] E. Q. ADAMS, *J. Opt. Soc. Amer. 32* (1942) 168.
[4] D. NICKERSON, *Amer. Dyestuff Rep. 39* (1950) 541.

Obschon die kartesischen Adams-Nickerson-Koordinaten A_i analytisch zugänglich sind und obwohl für die Value-Funktion Tabellen zur Verfügung stehen, erweist sich die Transformation der Normfarbwerte ins A-System als ziemlich zeitraubend. Zur Bewältigung größerer Datenmengen können programmgesteuerte Rechenanlagen eingesetzt werden. Wir verwenden zu diesem Zweck das Univac-UCT-System von Remington Rand. Ein anderer Weg zur Verringerung des Zeitaufwandes für die numerischen Rechenarbeiten, welche die Adams-Nickerson-Transformation mit sich bringt, besteht in deren Linearisierung in der hinreichend engen Umgebung eines Bildpunktes, dessen korrekte A-Koordinaten bekannt sind:

$$\Delta A_1 = \frac{\partial A_1}{\partial Y}\Delta Y + \frac{\partial A_1}{\partial Z}\Delta Z\,, \qquad (6)$$

$$\Delta A_2 = \frac{\partial A_2}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial A_2}{\partial Y}\Delta Y\,, \qquad (6')$$

$$\Delta A_3 = \frac{\partial A_3}{\partial Y}\Delta Y\,, \qquad (6'')$$

in Vektorschreibweise:

$$\vec{\Delta A} = \boldsymbol{M} \cdot \vec{\Delta X}\,. \qquad (6''')$$

Vier Elemente der Transformationsmatrix $\boldsymbol{M}$ sind gleich Null. Die Berechnung der übrigen Elemente mit Hilfe des JUDD-Polynoms ist trivial. Wir haben mit der Genauigkeit dieser Linearisierung gute Erfahrungen gemacht, wobei allerdings darauf hinzuweisen ist, daß nur eine konsequente Linearisierung in Frage kommt. Eine Mischung von korrekt und linearisiert gerechneten A-Koordinaten kann zu großen Fehlern führen.

Der Begriff der relativen Farbstoffstärke

Wenn bisher von farbmetrischen Koordinatensystemen die Rede war, dann geschah dies, um die Grundlagen zu schaffen für die quantitative Diskussion eines speziellen Problems der angewandten Farbmetrik, des Problems der *Bestimmung relativer Farbstoffstärken*. Was aber ist nun eigentlich unter dieser relativen Stärke von Farbstoffen zu verstehen? Diese Frage läßt sich leider nicht in Kürze beantworten. Sie wirft vielmehr ihrerseits einige schwierige Fragen fundamentaler Art auf.

Eine qualitative Vorstellung davon, was gemeint ist, erhält man, wenn man dem Vorgehen eines Koloristen bei der Abschätzung der relativen Stärke zweier Farbstoffe folgt (Abb. 7).

Der eine der beiden Farbstoffe soll als *Standardfarbstoff* oder *Typ* bezeichnet werden. Im vorliegenden Beispiel handelt es sich um den Originaltyp des Brillantalizarinlichtrot 4B. Von diesem Standardfarbstoff wurde eine Konzentrationsreihe auf Wolle-Strangmaterial ausgefärbt. Der zweite Farbstoff sei die Lieferung Nr. 92 des Brillantalizarinlichtrots 4B. Von dieser Lieferung wurde unter gleichen Bedingungen und auf demselben Substrat ebenfalls eine Ausfärbung hergestellt. Die Aufgabe besteht nun darin, die relative Stärke der Lieferung 92 in bezug auf den Typ zu bestimmen.



Abb. 7. Brillantalizarinlichtrot 4 B, Stufenfärbungen des Originaltyps und Ausfärbung der Lieferung 92



Abb. 8. Brillantalizarinlichtrot 4 B, farbstärkegleiche Färbung des Originaltyps und der Lieferung 92

Zur Verdeutlichung der im Text erwähnten Effekte wurden die Nuancenunterschiede zwischen der Lieferung 92 und dem Originaltyp sowie die Farbdifferenzen zwischen den Konzentrationsstufen bewußt übertrieben. Insbesondere liegt die tatsächliche Nuancendifferenz zwischen Lieferung 92 und Originaltyp zwar in der illustrierten Richtung (brillantere Nuance bzw. höhere Sättigung), doch sind die wirklichen Farbdifferenzen zwischen farbstärkegleichen Färbungen kleiner

Der Kolorist löst diese Aufgabe, indem er von Auge abschätzt, welche Konzentration des Standardfarbstoffs mit der Probe in einer Eigenschaft übereinstimmt, die er *Farbstärke* nennt. Im vorliegenden Beispiel wurde die Typfärbung mit der Konzentration 2% als farbstärkegleich mit der Probe (0,91%) beurteilt. Die entsprechenden Färbungen sind in Abb. 7 mit einem Kreuz bezeichnet. Diese farbstärkegleichen Färbungen sind im übrigen nicht identisch: Die Probe weist eine etwas höhere Sättigung auf als die entsprechende Typfärbung, wie aus Abb. 8 ersichtlich ist. Für die Farbdifferenz zwischen den beiden Färbungen ergab die Messung 2,5 NBS-Einheiten. Diese Einheit wurde vom *National Bureau of Standards* so festgelegt, daß sie einer technisch eben noch signifikanten Farbdifferenz entspricht.

In Analogie zum angedeuteten Vorgehen der Koloristen bei der Abschätzung relativer Farbstoffstärken kann eine vorläufige Definition dieses Begriffes versucht werden:

Sind c_T und c_P die Konzentrationen eines Standardfarbstoffs und eines Probefarbstoffs in Ausfärbungen, die unter gleichen Bedingungen und auf demselben Substrat hergestellt worden sind und die in der *Farbstärke* übereinstimmen, dann ist die *relative Farbstoffstärke* P_S des Probefarbstoffs gegeben durch das Verhältnis

$$P_S = \left(\frac{c_T}{c_P}\right)_S .$$

Der Index S soll darauf hinweisen, daß die relative Farbstoffstärke keine Konstante ist, sondern im allgemeinen mehr oder weniger von der Konzentration bzw. vom Farbstärkeniveau abhängt.

Im angeführten Beispiel ist die relative Farbstoffstärke definitionsgemäß:

$$P = \frac{2{,}0\%}{0{,}91\%} = 2{,}2 = 220\% .$$

Der Begriff der Farbstärke

Die vorgeschlagene Definition der relativen Farbstoffstärke ist zunächst noch inhaltsleer, weil deren Grundlage, der Begriff der Farbstärke, noch nicht erklärt ist. Wenn man nun die Koloristen fragt, was darunter zu verstehen sei, dann muß man feststellen, daß diese nicht in der Lage sind, diesen Begriff auch nur qualitativ zu umschreiben. Immerhin soll eines festgehalten werden: Unter der Farbstärke wird im folgenden *eine Eigenschaft gefärbter Oberflächen* verstanden. Genau so wie man einer farbigen Oberfläche einen bestimmten Farbton oder eine bestimmte Helligkeit zuschreibt, genau so kann man ihr auch eine bestimmte Farbstärke zuordnen.

Die Farbstärke ist also eine Eigenschaft einer Färbung und nicht eines Farbstoffes. Wie es zurzeit um die Möglichkeit einer sauberen, quantitativen Definition dieses Begriffes steht, davon wird noch die Rede sein müssen. Zunächst sei einmal angenommen, eine solche Definition liege vor und könne einer analytischen Lösung des Problems der Bestimmung relativer Farbstoffstärken zugrunde gelegt werden. Zur Veranschaulichung kann man die zweidimensionale Mannigfaltigkeit aller Körperfarben, welche in einer und derselben Farbstärke übereinstimmen, in den Farbkörper abbilden. Die Menge dieser Bildpunkte soll im folgenden als *Fläche konstanter Farbstärke* bezeichnet werden. Genau so, wie es Flächen konstanter Helligkeit oder Flächen konstanten Farbtons gibt, muß es auch Flächen konstanter Farbstärke geben. Sind diese Flächen konstanter Farbstärke bekannt, dann ist eine analytische Lösung unseres Problems prinzipiell möglich. Dabei kann man dem Vorgehen der Koloristen folgen.

Es bleibt dann noch das Verhalten des Standardfarbstoffs im Farbkörper analytisch zu fassen. Das ist vergleichsweise einfach, weil man sich dabei direkt auf Messungen stützen kann. Leider bestehen zwischen den farbmetrischen Variabeln und der Farbstoffkonzentration keine einfachen Beziehungen, etwa in der Art des Beerschen Gesetzes. Im allgemeinen sind alle drei Koordinaten konzentrationsabhängig, und die Bildpunkte der Ausfärbungen eines Farbstoffs bilden eine Raumkurve mit der Konzentration als Parameter. Diese Raumkurve verläuft im allgemeinen mit wachsender Konzentration vom Bildpunkt des nahezu weißen, blindgefärbten Substrates bei monoton abnehmender Helligkeit und zunächst zunehmender Sättigung – die Kurve entfernt sich von der Unbuntachse – bis zu einem Sättigungsmaximum, und von dort verläuft sie bei nunmehr abnehmender Sättigung gegen die Unbuntachse zurück und auf den Schwarzpunkt zu. Für einen bestimmten Farbstoff ist die Bildkurve seiner Ausfärbungen charakteristisch, allerdings mit Bezug auf das Substrat und auf die Färbemethode. Wir bezeichnen diese Raumkurve daher als *Charakteristik* dieses Farbstoffes. Gelegentlich wird sie auch *Färbekurve* genannt. Ist nun sowohl die Charakteristik des Standardfarbstoffes als auch der Verlauf der Flächen konstanter Farbstärke bekannt, dann ist es prinzipiell möglich, relative Farbstoffstärken zu berechnen.

Dies kann folgendermaßen geschehen: Es liege eine Ausfärbung eines Probefarbstoffes in der Konzentration c_P vor. Ihr Bildpunkt sei P (Abb. 9). Gesucht ist die

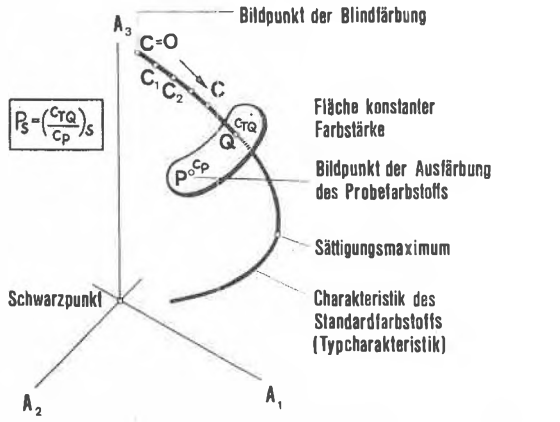


Abb. 9. Farbstoffcharakteristik und Fläche konstanter Farbstärke

Konzentration c_{TQ} derjenigen Ausfärbung des Standardfarbstoffes, welche gleiche Farbstärke besitzt wie die Probe. Der Bildpunkt dieser gesuchten Typfärbung sei Q. Er ergibt sich sehr einfach als Durchstoßpunkt der Typcharakteristik durch diejenige Fläche konstanter Farbstärke, in welcher der Probepunkt P liegt, d.h. die Koordinaten des gesuchten Punktes Q müssen sowohl der Gleichung der Typcharakteristik als auch der Gleichung der Fläche konstanter Farbstärke genügen. Die gesuchte Konzentration c_{TQ} ergibt sich aus der indizierten Typcharakteristik, und die relative Farbstoffstärke P wird nach Definition als Verhältnis c_{TQ}/c_P gewonnen.

Voraussetzung für jeden derartigen Versuch einer Berechnung relativer Farbstoffstärken ist die Kenntnis der Flächen konstanter Farbstärke. Leider ist es aber um diese Kenntnis zurzeit noch sehr übel bestellt. In einem Spezialfall ist die Übereinstimmung der Farbstärken trivial, nämlich wenn die Färbungen innerhalb der Unterscheidungsschwelle des Auges übereinstimmen. Dieser Spezialfall ist zwar wichtig und häufig, aber in diesem Zusammenhang völlig uninteressant. Weichen die zu vergleichenden Färbungen in der Chromatizität, d.h. im Farbton oder in der Sättigung oder in beiden Variabeln voneinander ab, dann erst erhebt sich die Frage, nach welchem Kriterium die Gleichheit von Farbstärken zu beurteilen ist. Bei der Diskussion dieser Frage geht es um Beziehungen zwischen den farbmetrischen Bildpunkten von Färbungen. Die Farbstärke ist deshalb eine empfindungsmetrische Größe, die auf der Basis eines empfindungsmetrischen Systems diskutiert werden muß.

Tabelle 1: 1/1-Hilfstypen

Nr.	φ	Y	A_3
1	6,1179	63,60	75,88
2	0,5528	33,00	57,46
3	0,8753	20,00	46,23
4	1,1093	16,30	42,24
5	1,3899	9,40	32,86
6	1,9204	8,40	31,15
7	2,2780	7,60	29,68
8	2,7093	4,00	21,25
9	3,0158	4,10	21,55
10	2,9594	5,80	25,94
11	4,0913	6,10	26,61
12	4,5061	7,90	30,24
13	5,2867	9,90	33,67
14	4,4111	5,60	25,47
15	5,9545	7,20	28,91
16	0,0814	6,90	28,31
17	1,0553	5,00	24,01
18	3,3264	4,80	23,49

In Tabelle 1 sind die Hellbezugswerte Y der 1/1-Hilfstypen aufgeführt.

Bei diesen Hilfstypen handelt es sich um Textilfärbungen, die auf Grund von gehäuften visuellen Schätzungen auf gleiche Farbstärke eingestellt worden sind. Aus dem Vergleich der Zahlenwerte ergibt sich zunächst, daß die Flächen konstanter Farbstärke durchaus nicht etwa mit den Flächen gleicher Helligkeit zusammenfallen: *Farbstärke und Helligkeit sind wesentlich verschiedene Begriffe.*

Die erwähnte Reihe der Hilfstypen ist fast die einzige empirische Grundlage, auf der man aufbauen kann, abgesehen allerdings von Tausenden von Farbstärkebewertungen, die täglich von einer großen Zahl von Koloristen durchgeführt werden, aber ausgemessen und ausgewertet werden müßten. Die Hilfstypen allein erweisen sich als viel zu schmale empirische Basis für eine in der Praxis genügende Festlegung von Flächen konstanter Farbstärke. Trotzdem haben RABE und KOCH den Versuch gemacht, mit Hilfe einer Ausgleichsrechnung diese Flächen analytisch zu fassen[5]. RABE und KOCH stützten sich dabei auf das DIN-System. Sie fanden durch Versuch und Irrtum, daß für die 1/1-Hilfstypen angenähert ein einfacher Zusammenhang zwischen der Dunkelstufe D und der Sättigungsstufe S besteht:

$$\theta = S' + 1{,}06\ D\,, \tag{7}$$

worin

$$S' = \frac{10 - 1{,}2\,D}{9} \cdot S\,. \tag{8}$$

Die Beziehung (7) bedeutet, daß für Oberflächen gleicher Farbstärke ein linearer Zusammenhang zwischen einer korrigierten Sättigung S' und der Dunkelstufe D besteht. Die korrigierte Sättigung S' wird ihrerseits als Funktion der Sättigungsstufe S und der Dunkelstufe D definiert (Gl. 8).

Der ungefähr lineare Zusammenhang zwischen dieser korrigierten Sättigung und der Dunkelstufe ist in Abb. 10 illustriert[5]. Die Bedeutung der offenbar signifikanten

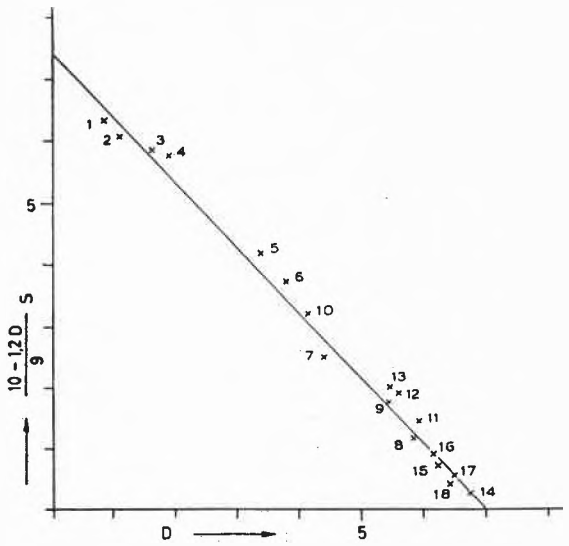


Abb. 10. Zusammenhang zwischen der korrigierten Sättigung S' und der Dunkelstufe D bei den 1/1-Hilfstypen

Restabweichungen von der Regressionsgeraden ist unübersichtlich. Es scheint, daß diese in erster Näherung eine Funktion des Farbtons allein sind. In Abb. 11 ist

[5] P. RABE und O. KOCH, *Melliand Textilber. 38* (1957) 173.

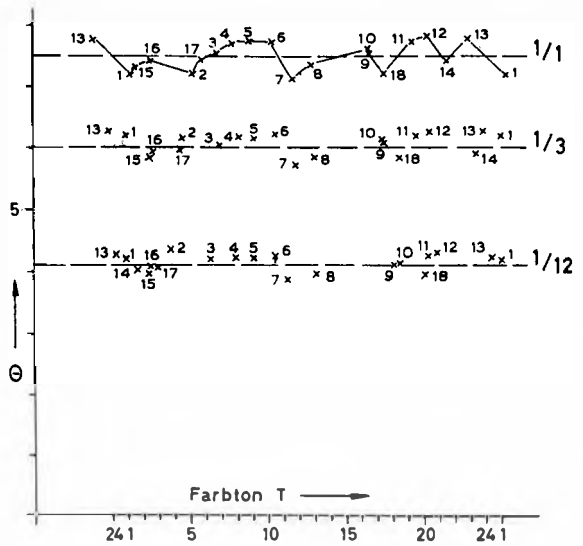


Abb. 11. θ nach RABE und KOCH für verschiedene Hilfstypenreihen in Funktion des DIN-Farbtons T[5]

die Größe θ nach RABE und KOCH für drei Hilfstypenreihen in Funktion des DIN-Farbtons aufgetragen[5]. Die Abweichungen von der gestrichelt eingetragenen Horizontalen entsprechen im Extremfall bei den 1/1-Hilfstypen bis zu 30% in der Farbstoffkonzentration. Da die Hilfstypenreihen geringerer Farbstärke Abweichungen aufweisen, die qualitativ und grob quantitativ ähnlich verlaufen, schlagen RABE und KOCH vor, einen Korrekturfaktor $\theta_1(T)/\theta_0$ einzuführen, der die farbtonabhängigen Restabweichungen berücksichtigt:

$$\theta' = \frac{\theta_1(T)}{\theta_0} \cdot \theta(T), \qquad (9)$$

worin $\theta_0 = 7{,}5$: mittleres θ für 1/1-Hilfstypen,
$\theta_1(T)$: Farbtonabhängigkeit des θ-Wertes bei den 1/1-Hilfstypen, nach Abb. 11 durch lineare Interpolation gewonnen.

Unsere eigenen Erfahrungen mit dieser korrigierten RABE-KOCH-Formel haben gezeigt, daß sie für verhältnismäßig grobe Einstellungen auf gleich Richttypstärke besonders dann durchaus brauchbar ist, wenn die Nuancen sehr weit auseinanderliegen. In derartigen Fällen erwies sie sich der visuellen Schätzung eines einzelnen Koloristen in der Genauigkeit und vermutlich auch in der Richtigkeit als weit überlegen. Dies dürfte allerdings weniger auf eine hohe Richtigkeit der RABE-KOCH-Formel zurückzuführen sein als auf die großen Streuungen, mit denen solche heterochrome koloristische Vergleiche behaftet sind. Bei feineren und präziseren Arbeiten, die auch eine präzise Kontrolle auf koloristischem Wege erlauben, haben wir weniger gute Erfahrungen mit der korrigierten RABE-KOCH-Formel gemacht. Dazu kommt, daß sie wegen des außerordentlichen Zeitaufwandes für die numerischen Rechnungen bei Routinearbeiten kaum in Frage kommen kann.

Ein weiterer Vorschlag eines Gleichheitskriteriums für Farbstärken stammt von GODLOVE[6]. Er bedient sich des Munsell-Systems und definiert die Flächen konstanter Farbstärke zunächst durch die folgende Beziehung:

$$S = \sqrt{16(10 - V)^2 + C^2} = \text{const}. \qquad (10)$$

Diese Formel entspricht der Annahme, daß die Flächen konstanter Farbstärke Kugeln mit dem Weißpunkt als Zentrum seien (vgl. Abb. 12). Diese Annahme erwies sich als zu grobe Näherung, so daß sich GODLOVE gezwungen sah, ein farbtonabhängiges Korrekturglied einzuführen:

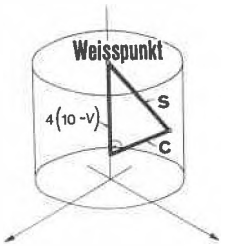


Abb. 12
Zur Definition der Flächen konstanter Farbstärke nach GODLOVE[6]

$$A = S + 0{,}025\, C(\Delta H_{10\,PB}) = \text{const}. \qquad (11)$$

Bei relativ hohen Helligkeiten hat GODLOVE passable Übereinstimmungen mit koloristischen Beurteilungen erhalten. Wir haben keine großen Erfahrungen mit der GODLOVE-Formel, doch ist sie, auch in der korrigierten Form, bei geringeren Helligkeiten sicher immer noch falsch, wie GODLOVE übrigens selbst zugibt[6].

In Abb. 13 sind GODLOVES A-Werte für die 1/1-Hilfstypen den RABE-KOCHschen θ-Werten in Funktion des DIN-Farbtons T gegenübergestellt. Bemerkenswert ist, daß beide Ansätze zu Restabweichungen Anlaß geben, die in Funktion des Farbtons ähnlich verlaufen. Im Fall des Ansatzes von GODLOVE scheinen sie größer zu sein. Dieser farbtonabhängige, systematische Gang der

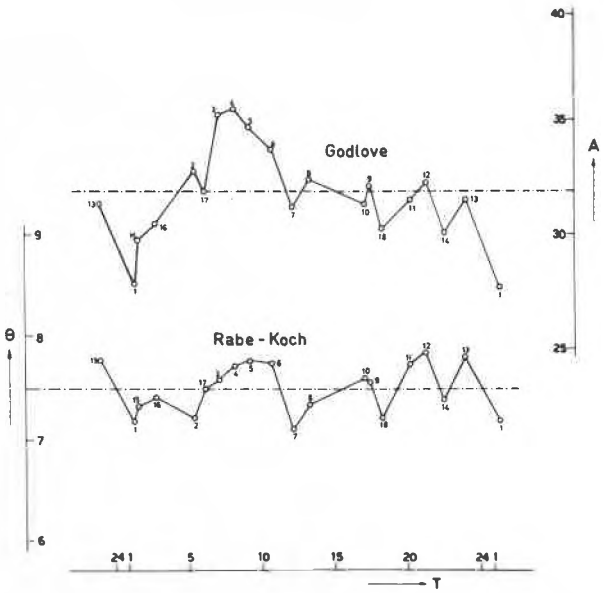


Abb. 13. A-Wert nach GODLOVE im Vergleich zu den θ-Werten nach RABE und KOCH in Funktion des DIN-Farbtons T

[6] I. H. GODLOVE, *Amer. Dyestuff Rep. 43* (1954) 685.

Größen A und θ kann entweder dahin interpretiert werden, daß die beiden Ansätze denselben systematischen Fehler aufweisen, oder dahin, daß die empirischen Unterlagen, also die Hilfstypenreihe, systematische Fehler aufweist. Ein Entscheid darüber ist schwierig, und es bedarf eines massiv erweiterten empirischen Materials, um hier klarer zu sehen.

Während GODLOVE sowie RABE und KOCH sich darauf beschränkt haben, auf Grund eines verhältnismäßig wenig umfangreichen empirischen Materials durch Versuch und Irrtum analytische Ansätze für ein Gleichheitskriterium für Farbstärken zu finden, geht eine bemerkenswerte Arbeit von GANZ[7] wesentlich tiefer. GANZ setzte sich in erster Linie mit der 1/1-Richttypfläche auseinander und hoffte, den koloristisch als Stärke bewerteten Grauanteil abschätzen und analytisch fassen zu können. Diese Arbeiten sind leider noch nicht abgeschlossen. Von weiteren Untersuchungen in dieser Richtung darf ein wertvoller Einblick in das Wesen des Begriffes erwartet werden, der mit dem leider immer noch im wesentlichen inhaltsleeren Wort Farbstärke belegt ist.

Bei unseren eigenen Arbeiten gingen wir, ähnlich wie GODLOVE, von einer ganz einfachen Annahme aus, wobei wir allerdings bewußt darauf verzichteten, Flächen konstanter Farbstärke durch den ganzen Farbkörper zu legen. Dafür schien uns die zur Verfügung stehende empirische Basis viel zu eng zu sein. Wir beschränkten uns auf die Behandlung von Fällen, in denen nur kleine Farbdifferenzen in der Größenordnung von einer bis einigen wenigen NBS-Einheiten zwischen den Färbungen gleicher Farbstärken vorliegen, und wir hofften, wenigstens das differentielle Verhalten der Flächen konstanter Farbstärke auf einfache Weise beschreiben zu können. Dieser Fall nuancenmäßig nur wenig abweichender Färbungen ist im allgemeinen viel häufiger als der Vergleich bei großen Farbdifferenzen.

Diese Beschränkung auf kleine Nuancendifferenzen hat aber noch einen anderen Vorteil: Die Ansätze lassen sich dann nämlich verhältnismäßig genau koloristisch überprüfen. Erfahrungsgemäß sind die zufälligen Fehler einer koloristischen Farbstärkeabschätzung um so größer, je größer die Nuancendifferenzen werden, um schließlich Beträge zu erreichen, die eine einzelne Schätzung fast bedeutungslos werden lassen.

Bei unserer Annahme über den differentiellen Verlauf der Flächen konstanter Farbstärke haben wir uns an das oben beschriebene Vorgehen der Koloristen bei der Abschätzung relativer Farbstoffstärken angelehnt. Wir haben angenommen, daß dabei aus der Konzentrationsreihe des Standardfarbstoffes diejenige Färbung ausgewählt wird, welche eine minimale Farbdifferenz gegenüber der zu vergleichenden Probe besitzt.

Stützt man sich auf ein empfindungsmetrisches System, dann, und allerdings nur dann, ist die geometrische Bedeutung dieser Annahme offensichtlich (Abb. 14):

[7] E. GANZ, *Z. angew. Math. Physik 8* (1957) 318.

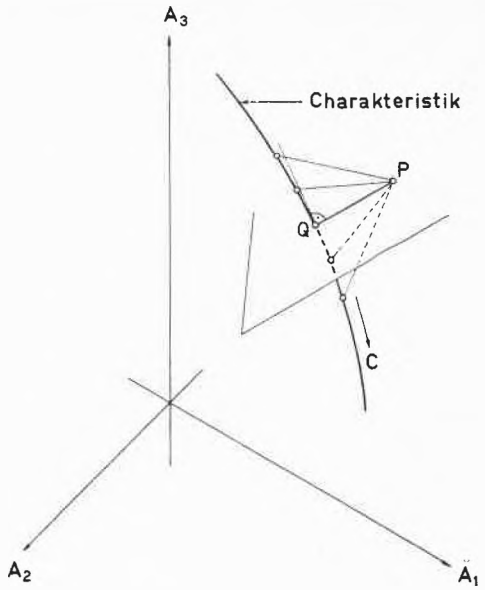


Abb. 14. Illustration zur Hypothese von der minimalen Farbdifferenz

Von allen Verbindungsstrecken zwischen dem Bildpunkt der Probe und Punkten auf der Charakteristik des Vergleichsfarbstoffes ist die Senkrechte die kürzeste. Daraus folgt, daß unsere Annahme gleichbedeutend ist mit der Voraussetzung, daß die Flächen konstanter Farbstärke in einem empfindungsmetrischen System senkrecht auf den Charakteristiken stehen. Diese Annahme erwies sich erwartungsgemäß als zu einfach, um allgemein richtig zu sein. Immerhin gibt sie den Verlauf der Flächen konstanter Farbstärke, wie er seit langem ganz grob bekannt ist[8], qualitativ wieder (vgl. Abb. 15).

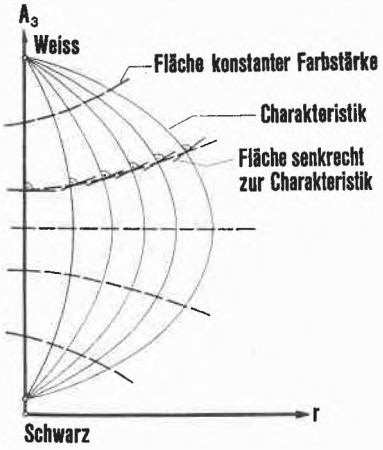


Abb. 15. Approximativer Verlauf der Farbstoffcharakteristiken und der Flächen konstanter Farbstärke nach D. B. JUDD[8]

Versuchsweise haben wir diese Annahme in einer größeren Anzahl von Beispielen der Berechnung relativer Farbstoffstärken zugrunde gelegt. Zu unserer eigenen Überraschung haben wir – mit Ausnahme des gelben Gebietes – keine signifikanten Abweichungen von den

[8] D. B. JUDD, *Color in Business, Science and Industry*, New York/London 1952, S. 291.

koloristischen Befunden festgestellt, sofern nur die Nuancenabweichungen hinreichend klein waren. Dies dürfte allerdings wiederum weniger auf eine hohe Richtigkeit unserer Senkrechtenhypothese zurückzuführen sein als auf die Streuungen, mit denen die zum Vergleich herangezogenen koloristischen Befunde behaftet sind.

Wir haben die drei erwähnten Näherungen für den Verlauf der Flächen konstanter Farbstärke an Beispielen untereinander und mit den mittleren koloristischen Befunden verglichen. Diese Arbeiten sind zurzeit noch nicht abgeschlossen, doch scheint uns eine Tatsache daraus schon jetzt als gesichert hervorgegangen zu sein: Ersetzt man die wahren Flächen gleicher Farbstärke in einem hinreichend kleinen Bereich des Farbkörpers (einige wenige NBS-Einheiten) durch eine Ebene, dann begeht man keinen signifikanten Fehler. Es bleibt dann immer noch die Frage, wie diese Ebenen in einem konkreten Fall gewonnen werden können, und dabei sind wir der Meinung, daß dies am sichersten auf empirischem Wege geschieht.

Routinemäßige Bestimmung relativer Farbstoffstärken

Im folgenden soll dargelegt werden, wie die Berechnung relativer Farbstoffstärken in solchen Fällen routinemäßig im einzelnen durchgeführt werden kann, in denen die Farbdifferenzen zwischen Probe und Standard klein sind und in denen eine brauchbare Näherung für die Flächen gleicher Farbstärke vorliegt. Das prinzipielle Vorgehen wurde oben bereits gestreift.

Die *analytische Fassung der Charakteristiken* bereitet solange keine Schwierigkeiten, als man sich auf ein hinreichend kleines Stück beschränken kann. Dies ist oft der Fall, weil die zu vergleichenden Färbungen zum vornherein so gewählt werden können, daß sie in der Farbstärke nicht sehr stark abweichen. Oft geht es dabei um weniger als 25% in den Farbstoffkonzentrationen.

In Abb. 16 ist die Helligkeitskoordinate A_3 für Ausfärbungen von Brillantalizarinlichtviolett FFR auf Wollgabardine in Funktion der Konzentration c aufgetragen. Diese Funktion erweist sich als recht unlinear. Trägt man A_3 hingegen in Funktion des Logarithmus der Konzentration auf, dann ergibt sich ein Zusammenhang, der im Bereich mittlerer Konzentrationen in guter Näherung als linear approximiert werden darf. Über nicht ganz so große Bereiche linear sind die Zusammenhänge zwischen den anderen beiden Koordinaten (A_2 und A_1) und der Konzentration, doch bringt die Wahl von log c als unabhängiger Variabeln auch dann eine Streckung der Kurven mit sich. Die Untersuchung einer großen Zahl von Charakteristiken auf verschiedenen Substraten hat gezeigt, daß in keinem Fall signifikante Abweichungen von der Linearität innerhalb von ± 25% in der Farbstoffkonzentration auftreten. Mit der Linearisierung der Farbstoffcharakteristiken läßt sich eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung erreichen, wie unten im einzelnen gezeigt wird.

Zur Ermittlung der linearisierten Charakteristik eines Farbstoffes aus den Messungen führen wir für jede der drei A-Koordinaten eine lineare Ausgleichsrechnung durch, welche die Regressionskoeffizienten b_i liefert.

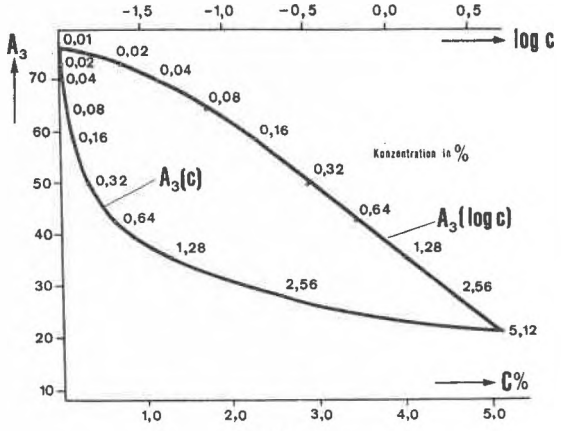


Abb. 16

Helligkeitskoordinate A_3 in Funktion der Farbstoffkonzentration c und in Funktion von log c für Brillantalizarinlichtviolett FFR

Diese drei Regressionskoeffizienten b_i werden im folgenden als Komponenten eines Vektors $\vec{b}$ aufgefaßt:

$$\vec{b} = \frac{d}{d \log c_T} \vec{A}_T(c_T). \qquad (12)$$

In Abb. 17 sind die Regressionsgeraden mit den zugehörigen 95%-Sicherheitsgrenzen für einen gelben Farbstoff illustriert. Wie aus Abb. 17 hervorgeht, rechtfertigt sich eine Ausgleichsrechnung angesichts der beträchtlichen, übrigens vorwiegend färberisch bedingten Streuungen.

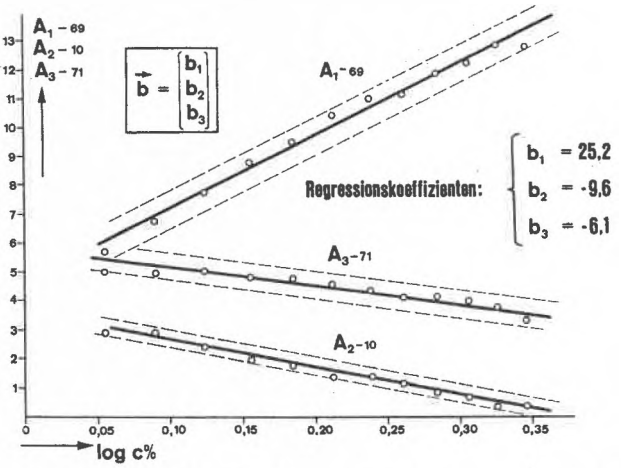


Abb. 17. Zur Ermittlung der Komponenten des Vektors $\vec{b}$ aus den Meßwerten

Ist nun die Charakteristik dermaßen analytisch gefaßt, dann muß nur noch der Verlauf der Ebene konstanter Farbstärke analytisch beschrieben werden. Dies kann durch Angabe der Komponenten ihres Normaleneinheitsvektors $\vec{n}$ geschehen.

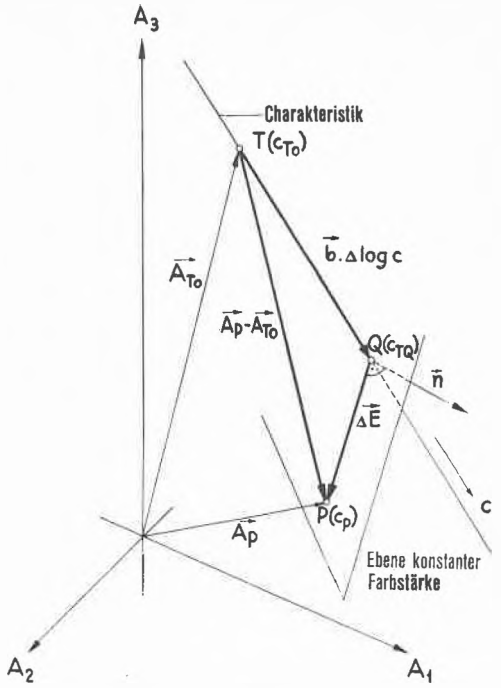


Abb. 18. Zur Ableitung der Formel (16)

Die Gerade TQ in Abb. 18 sei ein hinreichend lineares Stück der Charakteristik eines Standardfarbstoffes. Der Punkt T bzw. der Ortsvektor $\vec{A}_{T_o}$ entspreche einer Ausfärbung des Standardfarbstoffs in einer Standardkonzentration c_{T_o}. Der Punkt P bzw. der Ortsvektor $\vec{A}_p$ sei das Bild der Ausfärbung eines Probefarbstoffes in der Konzentration c_p. Die Aufgabe besteht nun darin, durch den Punkt P die Ebene konstanter Farbstärke zu legen, den Durchstoßpunkt Q der Charakteristik durch diese Ebene zu ermitteln und die dem Punkt Q entsprechende Konzentration c_{TQ} des Standardfarbstoffs aufzufinden. Interessant im Hinblick auf die Praxis ist auch die Restfarbdifferenz $\vec{\Delta E}$, und zwar sowohl der absolute Betrag dieses Vektors als auch dessen Richtung. Der Vektor $\vec{TQ}$ besitzt die Richtung der Charakteristik. Der Pfeilsinn ist durch die Richtung definiert, in der die Konzentrationen zunehmen.

Sind die Komponenten des Vektors $\vec{b}$ die drei Regressionskoeffizienten b_i, deren Berechnung oben angedeutet wurde, dann ist der Vektor $\vec{TQ}$ offensichtlich $\vec{b} \cdot \Delta \log c$. Aus der Abbildung ist sofort ersichtlich, daß der Vektor $\vec{A}_p - \vec{A}_{T_o}$ die vektorielle Summe der beiden anderen in Abb. 18 hervorgehobenen Vektoren darstellt. Es gilt also

$$\vec{A}_p - \vec{A}_{T_o} = \vec{b} \cdot \Delta \log c + \vec{\Delta E} \,. \tag{13}$$

Da $\vec{\Delta E}$ nach Voraussetzung in der Ebene konstanter Farbstärke liegt, steht dieser Vektor auf deren Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ senkrecht, und das Skalarprodukt $\vec{n'} \cdot \vec{\Delta E}^*$ verschwindet. Nach skalarer Multiplikation der Gleichung (13) mit $\vec{n}$ bleibt deshalb

$$\vec{n'} (\vec{A}_p - \vec{A}_{T_o}) = \vec{n'} \cdot \vec{b} \cdot \Delta \log c \,, \tag{14}$$

und daraus folgt durch Einsetzen von

$$\Delta \log c = \log \frac{c_{TQ}}{c_{T_o}} \tag{15}$$

die Schlußformel

$$\log \frac{c_{TQ}}{c_{T_o}} = \frac{\vec{n'} \cdot (\vec{A}_p - \vec{A}_{T_o})}{\vec{n'} \cdot \vec{b}} \,. \tag{16}$$

Da die Konzentration der Standardfärbung c_{T_o} bekannt ist, findet man aus dieser Beziehung sehr einfach die Konzentration c_{TQ} derjenigen Ausfärbungen des Standardfarbstoffs, die mit der Probe P farbstärkegleich ist, und das Verhältnis c_{TQ}/c_P ist als die gesuchte relative Stärke der beiden verglichenen Farbstoffe definiert. Die Farbdifferenz $\vec{A}_p - \vec{A}_{T_o}$ kann mit Hilfe der linearisierten Adams-Nickerson-Transformation (6‴) aus den Differenzen der Normfarbwerte gewonnen werden:

$$\vec{A}_p - \vec{A}_{T_o} = \boldsymbol{M} (\vec{X}_p - \vec{X}_{T_o}) = \boldsymbol{M} \cdot \vec{\Delta X}, \tag{17}$$

worin

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_{T_o} = \begin{pmatrix} X_{T_o} \\ Y_{T_o} \\ Z_{T_o} \end{pmatrix}, \quad \vec{\Delta X} = \begin{pmatrix} X_p - X_{T_o} \\ Y_p - Y_{T_o} \\ Z_p - Z_{T_o} \end{pmatrix},$$

und die Gleichung (16) wird zu

$$\log \frac{c_{TQ}}{c_{T_o}} = \frac{\vec{n'}}{\vec{n'} \cdot \vec{b}} \, \boldsymbol{M} \, \vec{\Delta X}. \tag{16'}$$

Wegen

$$\frac{c_{TQ}}{c_{T_o}} \approx 1 \tag{18}$$

kann auch die Logarithmus-Funktion linearisiert werden, und die Beziehung (16′) geht wegen (18) und wegen

$$\ln (1 + x) \approx x \tag{19}$$

über in

$$\frac{\Delta c_T}{c_{T_o}} = \left[2{,}303 \left(\frac{\vec{n'}}{\vec{n'} \cdot \vec{b}} \right) \boldsymbol{M} \right] \cdot \vec{\Delta X}, \tag{16″}$$

worin

$$\Delta c_T = c_{TQ} - c_{T_o} \,.$$

Kann in hinreichender Näherung angenommen werden, daß die Ebene konstanter Farbstärke senkrecht auf der Typcharakteristik steht, dann ist $\vec{n}$ parallel zu $\vec{b}$. Da der Absolutbetrag von $\vec{n}$ in (16″) herausfällt, kann $\vec{n}$ durch $\vec{b}$ ersetzt werden, und die Formel (16″) geht über in

$$\frac{\Delta c_T}{c_{T_o}} = \left[2{,}303 \left(\frac{\vec{b'}}{\vec{b'} \cdot \vec{b}} \right) \boldsymbol{M} \right] \Delta X \,. \tag{16‴}$$

* Gestrichene Vektoren und Matrizen sind transportiert. Der Vektor $\vec{n'}$ ist also ein Zeilenvektor.

Die Formeln (16″) oder (16‴) liefern direkt die relative Abweichung der Konzentrationen, die den Punkten Q und T in Abb. 18 entsprechen.

Ist $\Delta c_T/c_{T_o}$ mit Hilfe von einer dieser Formeln berechnet worden, dann ergibt sich die relative Farbstoffstärke sehr einfach nach

$$P_T = \frac{c_{T_o}}{c_p}\left(1 + \frac{\Delta c_T}{c_{T_o}}\right). \qquad (20)$$

In vielen praktischen Fällen genügt schon die Information, welche (16″) oder (16‴) direkt liefern, nämlich das Verhältnis $\Delta c_T/c_{T_o}$, so daß sich ein Einsetzen in (20) erübrigt.

Der Inhalt der eckigen Klammern in (16″) und (16‴) ist ein Zeilenvektor. Dieser muß für einen Bezugsfarbstoff und eine Standardkonzentration c_{T_o} einmal, und nur einmal, berechnet werden. Bei der routinemäßigen Bestimmung der relativen Farbstoffstärke von Probefarbstoffen, z. B. von verschiedenen Lieferungen eines Farbstoffs in bezug auf den entsprechenden Typ in einer und derselben Standardkonzentration, besteht der numerische Rechenaufwand zur Gewinnung der relativen Farbstoffstärke aus den gemessenen Normfarbwerten ($\overrightarrow{\Delta X}$) im wesentlichen in einer einfachen skalaren Multiplikation zweier Vektoren, denn setzt man

$$2{,}303 \cdot \frac{\vec{n'}}{\vec{n'} \cdot \vec{b}}\, \boldsymbol{M} = \vec{k'}, \qquad (21)$$

dann wird (16″)

$$\frac{\Delta c_T}{c_{T_o}} = \vec{k'} \cdot \overrightarrow{\Delta X},$$

oder in Komponenten geschrieben:

$$\frac{\Delta c_T}{c_{T_o}} = k_1 \cdot \Delta X + k_2 \cdot \Delta Y + k_3 \cdot \Delta Z. \qquad (16''')$$

Aus der Schreibweise von Formel (16‴) wird besonders deutlich, daß der numerische Rechenaufwand sehr gering wird, wenn die Koeffizienten k_i für einen Typ einmal berechnet sind.

Es ist kein Zufall, daß wir in die Rechnung eine Ausfärbung des Standardfarbstoffs mit einbezogen haben. Es geschah dies darum, weil die üblichen Laborfärbungen selbst dann, wenn das Textilmaterial genau identisch ist, viel zu wenig genau absolut reproduzierbar sind. Man geht daher im allgemeinen so vor, daß man jedesmal, wenn eine Probe auf einen und denselben Standardfarbstoff zu beziehen ist, unter gleichen Färbebedingungen diesen Standardfarbstoff mitfärbt.

Ist das Verhältnis $\Delta c_T/c_{T_o}$ bekannt, dann ergibt sich die Restfarbdifferenz $\overrightarrow{\Delta E}$ zwischen den farbstärkegleichen Färbungen, deren Bildpunkte in Abb. 18 mit P und Q bezeichnet sind, nach

$$\overrightarrow{\Delta E} = \boldsymbol{M}\,\overrightarrow{\Delta X} - 0{,}4343\,\frac{\Delta c_T}{c_{T_o}} \cdot \vec{b}. \qquad (22)$$

Aus den Komponenten des Vektors $\overrightarrow{\Delta E}$ können die entsprechenden Differenzen in den Zylinderkoordinaten, Δr, $\Delta\varphi$ und ΔA_3 sowie die Gesamtfarbdifferenz $|\overrightarrow{\Delta E}|$ mühelos, z. B. auf graphischem Wege, gewonnen werden. Die Differenz Δr mißt den Unterschied in der Sättigung, $r \cdot \Delta\varphi$ die Farbtondifferenz und ΔA_3 den Helligkeitsunterschied zwischen den Färbungen gleicher Farbstärke. Auf Grund der Gesamtfarbdifferenz $|\overrightarrow{\Delta E}|$ kann z. B. entschieden werden, ob eine Lieferung innerhalb einer vorgegebenen Toleranz mit dem Typ übereinstimmt.

Auf Grund der Komponenten des Vektors $\vec{A}_p - \vec{A}_{T_o}$ und mit Hilfe des Vektor $\vec{b}$ sowie auf Grund geeigneter farbmetrischer Unterlagen über eventuelle Nuancierkomponenten ist es möglich, die Konzentration solcher Nuancierkomponenten vorauszuberechnen.

Zusammen mit der Berechnung der Restfarbdifferenz $|\overrightarrow{\Delta E}|$ beansprucht die numerische Auswertung für eine einzelne Probe nur einige wenige Minuten, sofern die Daten des Standardfarbstoffs bekannt sind. Dieser geringe Zeit- und Arbeitsaufwand für die numerische Auswertung der Messungen ist auf die konsequente Linearisierung aller Beziehungen zurückzuführen. Gegenüber den uns bekannten bisherigen Versuchen zur farbmetrischen Bestimmung relativer Farbstoffstärken scheint uns der geringe Rechenaufwand bei mindestens gleicher Präzision innerhalb des Bereiches kleiner Farbdifferenzen der Hauptvorteil unseres Vorgehens zu sein. Es ist allerdings zuzugeben, daß die Ausmessung des Standardfarbstoffs, die anschließenden Ausgleichsrechnungen, die Berechnung der Elemente der Transformationsmatrix und die übrigen Vorbereitungsarbeiten ziemlich zeitraubend sind, doch müssen diese Arbeiten für einen Standardfarbstoff nur einmal durchgeführt werden.

Im folgenden sind die Näherungen und Annahmen, die der Formel (16‴) zugrunde liegen, nochmals zusammengestellt:

1. *Linearisierung der modifizierten Adams-Nickerson-Transformation innerhalb kleiner Bereiche des Farbkörpers.*
   Wir haben den Einfluß dieser Fehlerquelle eingehend untersucht. Er ist gering, sofern man konsequent, d. h. für Probe und Typ, linearisiert.
2. *Linearisierung der Konzentrationsabhängigkeit der A-Koordinaten der Ausfärbungen des Standardfarbstoffes nach (12).*
   Den Einfluß dieser Fehlerquelle haben wir an einer größeren Zahl von Beispielen untersucht. Innerhalb von ± 25 % in der Farbstoffkonzentration konnten wir in keinem Fall signifikante Abweichungen von der Linearität feststellen.
3. *Annahme: Der Vektor $\vec{b}$ der Regressionskoeffizienten ist hinreichend genau reproduzierbar.*
   Wir haben die Berechtigung dieser Annahme noch nicht im Detail untersucht, werden das aber noch tun. Immerhin besteht nach unseren bisherigen Erfahrungen kein Anlaß,

an der Richtigkeit dieser Annahme zu zweifeln, sofern die Färbebedingungen und das Substrat hinreichend genau übereinstimmen; die absoluten färberischen Streuungen werden ja dadurch berücksichtigt, daß nicht absolut, sondern nur relativ zu einer parallel hergestellten Ausfärbung des Standardfarbstoffs gemessen wird.

4. *Linearisierung der Flächen konstanter Farbstärke innerhalb kleiner Bereiche des Farbkörpers.*
   Dieser Punkt wurde oben gestreift. Verglichen mit den Streuungen der koloristischen Bewertung dürfte diese Fehlerquelle irrelevant sein. Immerhin sind hier die Verhältnisse noch unübersichtlich.

5. *Annahme: Innerhalb kleiner Bereiche des Farbkörpers sind die Flächen konstanter Farbstärke parallel.*
   Über die Berechtigung dieser Annahme wissen wir noch wenig. Man wird deshalb gut daran tun, durch geeignete Wahl der Konzentration der verglichenen Farbstoffe dafür zu sorgen, daß die Farbdifferenz zwischen Probe und Standardausfärbung in der Gegend ihres Minimums bleibt. Mit andern Worten: Die verglichenen Färbungen sollen schon von Anfang an so gewählt werden, daß sie möglichst gleiche Farbstärke besitzen. Dies läßt sich meist ohne Schwierigkeiten erreichen, z. B. auf Grund von Messungen in Lösung.

6. *Eventuelle Annahme: Die Flächen konstanter Farbstärke stehen senkrecht auf den Charakteristiken.*
   Diese Annahme ist im allgemeinen nur in grober Näherung richtig und sollte nur dann verwendet werden, wenn keine besseren Unterlagen und insbesondere keine empirischen Daten über den Verlauf der Fläche konstanter Farbstärke zur Verfügung stehen. Daß diese Annahme bei hochgesättigten gelben Farbstoffen nicht der Wirklichkeit entspricht, wurde bereits erwähnt. Bei sehr hoch gesättigten Färbungen muß man damit auf jeden Fall auch bei anderen Farbtönen vorsichtig sein. Bei trüberen Nuancen haben wir dagegen eine überraschend gute Übereinstimmung mit den koloristischen Befunden feststellen können.
   In denjenigen Fällen, in welchen die Senkrechtenhypothese eine zu grobe Näherung darstellt, stehen zurzeit die folgenden Möglichkeiten zur Gewinnung der Komponenten des Vektors $\vec{n}$ offen:
   a) Heranziehung empirischer Daten. Diese sollten von einer größeren Anzahl von Koloristen stammen.
   b) Berechnung auf Grund der Formel von Rabe und Koch, vorzugsweise auf Grund von Gleichung (7).
   c) Berechnung auf Grund der Formel von Godlove (Gl. 11).

7. *Linearisierung der Logarithmus-Funktion.*
   Die systematischen Fehler, welche die Näherung (19) mit sich bringt, sind zu vernachlässigen, solange $\frac{\Delta c_T}{c_{T_0}}$ 10 % nicht wesentlich übersteigt. Da ohnehin darauf geachtet werden muß, daß die Farbstärken von Typ- und Probefärbung nicht allzu stark abweichen, bringt die Linearisierung nach (19) keine zusätzlichen Einschränkungen in der Anwendbarkeit der Formeln (16) mit sich.

Zum Schluß soll unser Vorgehen bei der Bestimmung einer relativen Farbstoffstärke im Sinne eines Rezeptes nochmals zusammengefaßt werden. Es wird dabei angenommen, daß die nötigen, vorbereitenden Messungen am Standardfarbstoff durchgeführt und ausgewertet seien, d. h. daß der Vektor $\vec{k}$ bekannt sei.

1. Man färbe den Standardfarbstoff unter standardisierten Färbebedingungen auf ein standardisiertes Substrat in einer Standardkonzentration aus. Unter identischen Färbebedingungen färbe man gleichzeitig und auf demselben Färbebad den Probefarbstoff auf dasselbe standardisierte Substrat in einer solchen Konzentration aus, daß von den beiden entstehenden Färbungen erwartet werden kann, daß sie ungefähr dieselbe Farbstärke aufweisen.
2. Man messe die Normfarbwerte X, Y und Z der Standardfärbung und der Probefärbung.
3. Man setze die Differenzen der Normfarbwerte in die Formel (16‴) ein und
   man gewinnt:
   a) die relative Farbstoffstärke des Probefarbstoffs in bezug auf den Standardfarbstoff in Prozenten,
   man gewinnt:
   b) den Absolutbetrag $|\vec{\Delta E}|$ der Farbdifferenz zwischen den farbstärkegleichen Färbungen von Standard- und Probefarbstoff. Es ist dies ein Maß für die gesamte Nuancendifferenz zwischen farbstärkemäßig entsprechenden Färbungen. Die Zahl $|\vec{\Delta E}|$ kann z. B. als Kriterium dafür verwendet werden, ob eine Lieferung eines Farbstoffes hinreichend genau mit dem Typ übereinstimmt.
   man gewinnt:
   c) die drei Komponenten ΔE_i der Farbdifferenz zwischen den farbstärkegleichen Färbungen von Standardfarbstoff und Probefarbstoff. Aus diesen drei Komponenten ergeben sich, z. B. auf graphischem Wege, die Differenzen im Farbton, in der Sättigung und in der Helligkeit zwischen farbstärkemäßig entsprechenden Färbungen, also die Art der Nuancenabweichungen.
   und man gewinnt schließlich:
   d) quantitative Unterlagen zur Vorausberechnung eventueller Nuancierkomponenten.

Wenn die obigen Ausführungen den Eindruck erweckt haben, daß der Einsatz der Farbmetrik zur objektiven und quantitativen Lösung von Problemen der koloristischen Praxis nicht immer ganz trivial ist, dann entspricht dies durchaus den Tatsachen, und zwar zeigt es sich, daß diese Schwierigkeiten in erster Linie davon herrühren, daß einige der fundamentalen Begriffe zurzeit noch immer einer sauberen und quantitativen Fassung entbehren, und es wird noch intensiver Anstrengungen bedürfen, um diese Grundlagen zu schaffen.

Die Farbmetrik ist eine verhältnismäßig junge wissenschaftliche Disziplin, deren Möglichkeiten noch bei weitem nicht erschöpft sind, im Gegenteil: Die Farbmetrik steht noch am Anfang ihrer Entwicklung, doch ist es schon jetzt möglich, praktische Problemstellungen anzugehen und befriedigende Lösungen zu finden.

Der Verfasser dankt den Herren Dr. P. Buchner und Xaver Fink für ihre intensive Mitarbeit bei der Bearbeitung der angeschnittenen Probleme.