Wärmeaustausch an Nicht-Newtonschen Flüssigkeiten in Apparaten mit rotierenden Elementen

Y. Trouilhet * und F. Widmer **, Institut für Verfahrens- und Kältetechnik der ETH Zürich

Y. Trouilhet

Abstract

A model for the flow and heat exchange in different rotative apparatus in chemical engineering is presented. The heat of dissipation, the non-Newtonian behaviour and the temperature dependance of the viscosity are taken in account in this model. The rotor power, heat flux at the walls and temperature profiles in the liquid are determined as function of the rotor speed, wall temperatures, physical constants of the liquid and gap geometry.

* Dr. Ing. Y. Trouilhet, früherer Mitarbeiter des Institutes für Verfahrens- und Kältetechnik der ETH Zürich, z. Zt. Mitarbeiter des Battelle Memorial Institut, CH-1227 Genf

** Prof. Dr. F. Widmer, Vorsteher des Institutes für Verfahrens- und Kältetechnik der ETH, CH-8092 Zürich

Zusammenfassung

Es wird ein Modell für den Wärmeaustausch in Apparaten mit rotierenden Elementen entwickelt, welches die Dissipationswärme, das Nicht-Newtonsche Verhalten der Flüssigkeit und die Temperaturunabhängigkeit der Viskosität berücksichtigt. Für den Fall einer Couetteströmung werden die Rotorleistung, der Wärmeübergang an die begrenzenden Wandungen und der Temperaturverlauf in der mechanisch beeinflussten Flüssigkeit theoretisch in Abhängigkeit der Rotordrehzahl, Spaltgeometrie, Wandtemperatur und der Stoffkennwerte abgeleitet.

1. Einleitung

In vielen verfahrenstechnischen Apparaten, die mit rotierenden Wellen oder Elementen ausgerüstet sind, wie Dünnschichtapparate, Extruder, Kneter, Pumpen, wird die zu behandelnde Flüssigkeit mechanisch zwischen einem äusseren festen Zylinder und den inneren rotierenden Wandungen beeinflusst. Oft werden diese Apparate für die Verarbeitung von Flüssigkeiten mit hohen Viskositäten und Nicht-Newtonschem Verhalten, wie sie in der Kunststoff-, Nahrungsmittel- und petrochemischen Industrie auftreten, eingesetzt. Dabei kann bei den hohen mechanischen Scherbeanspruchungen der viskosen Flüssigkeit eine vielfach beträchtliche, durch innere Reibung bewirkte Dissipationswärme in der Flüssigkeit erzeugt werden, die im Grenzfall gleich der von aussen zugeführten Rotorantriebsenergie ist. Diese Erscheinung wirkt sich in einem Temperaturanstieg der Flüssigkeit und bei stark temperaturabhängiger Viskosität in einer abnehmenden Rotorantriebsleistung aus.

Für die Auslegung und Dimensionierung der beschriebenen Apparate ist es von Bedeutung, bei stationären Verhältnissen einerseits den Verlauf der Temperatur und der Scherbeanspruchung in der beeinflussten Flüssigkeitsschicht zu kennen, um Produktschädigungen zu vermeiden, und andererseits die Betriebsbedingungen wie Wärmeübergang an die begrenzenden Wände und Rotorantriebsleistung usw. berechnen zu können. Mit Hilfe eines Modells für die Couetteströmung, welches die Integration der in differentieller Form abgeleiteten Impuls- und Energiegleichungen ermöglicht, werden mit der vorliegenden Untersuchung Lösungen für diese Problemstellung unter Berücksichtigung der Scher- und Temperaturabhängigkeit der Flüssigkeitsviskosität und der Spaltgeometrie erarbeitet.

2. Beschreibung des Modells und Ermittlung des Temperatur- und Geschwindigkeitsverlaufes

Die Strömung in verschiedenen verfahrenstechnischen Apparaten, die mit rotierenden Wellen oder Elementen ausgerüstet sind, kann meist abschnittsweise durch eine zylindrische Couetteströmung idealisiert werden. Diese tritt zwischen zwei koaxialen Zylindern, von denen der innere mit gleichbleibender Geschwindigkeit rotiert, auf (Abb. 1). In einem Dünnschichtverdampfer kann diese Modellströmung zur Beschreibung der Verhältnisse zwischen Rotorblättern und der zylindrischen Wand benützt werden [1]. In einem Ko-Kneter tritt diese Strömung abschnittsweise im Spalt zwischen Rotor und Stator auf [2] und in einer Rühreinrichtung für viskose Flüssigkeiten (Wendelrührer) können die Vorgänge zwischen der teilweise mit dem Rührer rotierenden Flüssigkeit und der begrenzenden Wand angenähert durch eine Couetteströmung beschrieben werden [3].

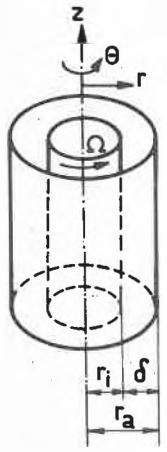

Abb. 1: Schematische Darstellung der Couette-Strömung im Ringraum zwischen innerem rotierendem und äusserem ruhendem Zylinder.

Für die Couetteströmung nach Abb. 1 werden die folgenden Voraussetzungen angenommen (Bezeichnungen im zylindrischen Koordinatensystem):

- laminare Strömung
- stationäre Verhältnisse ($\partial/\partial t = 0$)
- axialsymmetrische Strömung ($\partial/\partial \theta = 0$)
- keine Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten in axialer Richtung ($\partial/\partial z = 0$)
- axiale Geschwindigkeit gleich null ($v_z = 0$)
- Dichte ϱ und Wärmeleitfähigkeit λ der Flüssigkeit von der Temperatur unabhängig.

Damit vereinfachen sich die Differentialgleichungen für die Erhaltung des Impulses und der Energie der Couetteströmung zu folgender Form [4] mit $\tau_{r\theta} = \tau$ und $v_\theta = v$.

$$\frac{d}{dr}(r^2 \tau) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,\dot{q}_r) + \tau r \frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right) = 0 \tag{2}$$

Für die Beschreibung des Nicht-Newtonschen Fliessverhaltens der Flüssigkeit wird das Ostwald de Waelesche Potenzgesetz mit der von der Temperatur abhängigen Bezugsviskosität η_0 und dem temperaturunabhängigen Flüssigkeitsindex n angenommen. Die Temperaturabhängigkeit von η_0 wird über eine exponentielle Funktion dargestellt, so dass sich als allgemeines Fliessgesetz ergibt:

$$\tau = -\eta_0\, e^{-bT}\, |D|^{n-1} D \tag{3}$$

$$D = r\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right) \tag{4}$$

Die angenommenen Voraussetzungen für die Couetteströmung nach Abb. 1 führen zu folgenden Randbedingungen am inneren und äusseren Zylinder (r_i, r_a):

$$r = r_i, \quad v = \Omega r_i, \quad T = T_i \tag{5}$$

$$r = r_a, \quad v = 0, \quad T = T_a \tag{6}$$

Mit Hilfe der dimensionslosen Variabeln

$$x = r/r_i, \quad V = v_\theta/\Omega r_i, \quad \theta = \frac{T - T_i}{T_a - T_i} \tag{7}$$

lassen sich die Gleichungen (1) (2) und die Randbedingungen (5) (6) zusammen mit den folgenden 4 dimensionslosen Kennzahlen Br, B, k und n

$$Br = \frac{\eta_i r_i^2 \Omega^{n+1}}{\lambda (T_a - T_i)}, \quad B = b(T_a - T_i), \quad k = \frac{r_a}{r_i}, \quad n \tag{8}$$

in dimensionsloser Form darstellen:

$$\frac{\partial}{\partial x} x^2 e^{-B\theta} \left| x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{x}\right)\right|^{n-1} x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{x}\right) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{d\theta}{x}\right) + Br \cdot e^{-B\theta} \left| x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{x}\right)\right|^{n+1} = 0 \tag{10}$$

$$x = 1: \quad V = 1; \quad \theta = 0 \tag{11}$$

$$x = k: \quad V = 0; \quad \theta = 1 \tag{12}$$

Die *Brinkman*-Zahl nach Beziehung (8) kann als Verhältnis zwischen Dissipationswärme und durch Wärmeleitung übertragene Wärme beschrieben werden.

Die Integration des Gleichungssystems (9) (10) unter Berücksichtigung der Randbedingungen (11) (12) führt zu folgenden Beziehungen für den Temperatur- und Geschwindigkeitsverlauf als Funktion des dimensionslosen Radius x und der 4 eingehenden dimensionslosen Kennzahlen Br, B, k, n:

$$\theta = \frac{n}{B} \ln \left(\frac{2\, n\, c_2^2\, c_3\, x^{c_2 + \frac{2}{n}}}{Br\, B\, c_1^{\frac{n+1}{n}} \left(1 + c_3 x^{c_2}\right)^2} \right) \tag{13}$$

$$V = \frac{2\, n\, c_2\, x}{Br\, B\, c_1} \left(\frac{1}{1 + c_3\, x^{c_2}} + c_4 \right) \tag{14}$$

Für die nähere Ableitung von Gleichungen (13) und (14) sei auf die Promotionsarbeit von *Y. Trouilhet* [5] verwiesen. Die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3 und c_4 lassen sich nach folgenden Gleichungen bestimmen:

Für $n \neq 1$ wird c_2:

$$c_2 = \frac{\dfrac{2\,n}{Br\,B}\left(e^{\frac{B}{2n}} k^{-\frac{c_2}{2} - \frac{1}{n}} - 1\right)\left(1 - e^{\frac{B}{2n}} k^{-\frac{c_2}{2} - \frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{k^{\frac{c_2}{2} + \frac{1}{n}} \left(k^{c_2} - 1\right)^{-1} e^{-\frac{B}{2n}}} \tag{15a}$$

und für den Spezialfall einer Newtonschen Flüssigkeit mit $n = 1$:

$$c_2 = \frac{2}{\ln k} \operatorname{arc\,cosh} \left\{ \frac{k}{2\, e^{\frac{B}{2}}} \left(\frac{Br\, B}{2} + 1 + \frac{e^B}{k^2} \right) \right\} \tag{15b}$$

Der Wert von c_2 nach Gleichung (15b) kann als Anfangswert für die Bestimmung von c_2 nach der transzendenten Gleichung (15a) benutzt werden. Die anderen drei Integrationskonstanten lassen sich explizit berechnen:

$$c_3 = \frac{c^{\frac{B}{2n}} k^{-\frac{c_2}{2} - \frac{1}{n}}}{1 - e^{\frac{B}{2n}} k^{\frac{c_2}{2} - \frac{1}{n}}} \tag{16}$$

$$c_1 = \frac{2\, n\, c_2\, c_3 \left(k^{c_2} - 1\right)}{Br\, B\, (1 + c_3)\left(1 + c_3\, k^{c_2}\right)} \tag{17}$$

$$c_4 = -\frac{1}{1 + c_3\, k^{c_2}} \tag{18}$$

3. Auswertung des Temperatur- und Geschwindigkeitsverlaufes

Für Silikonöl AK 100 000 mit $\eta_0 = 25$ Pa · s bei $T_a = 25$ °C ist der theoretisch ermittelte Geschwindigkeits- und Temperaturverlauf für zwei unterschiedliche Rotationsgeschwindigkeiten $v_i = 11$ m/s und $v_i = 1{,}1$ m/s für $T_a = T_i = 20$ °C und $T_a = 120$ °C, $T_i = 20$ °C in Abb. 2 dargestellt. Die in der Flüssigkeit erzeugte Dissipationswärme führt wie zu erwarten bei höheren Geschwindigkeiten zu einem Temperaturmaximum in der Flüssigkeitsschicht selbst. Die gleiche Charakteristik für den Temperaturverlauf konnte theoretisch aus dem mit einem Laser-Doppler-Anemometer gemessenen Geschwindigkeitsverlauf für Oppanol B3 (BASF) bei verschiedenen Drehzahlen f bestimmt werden (Abb. 3).

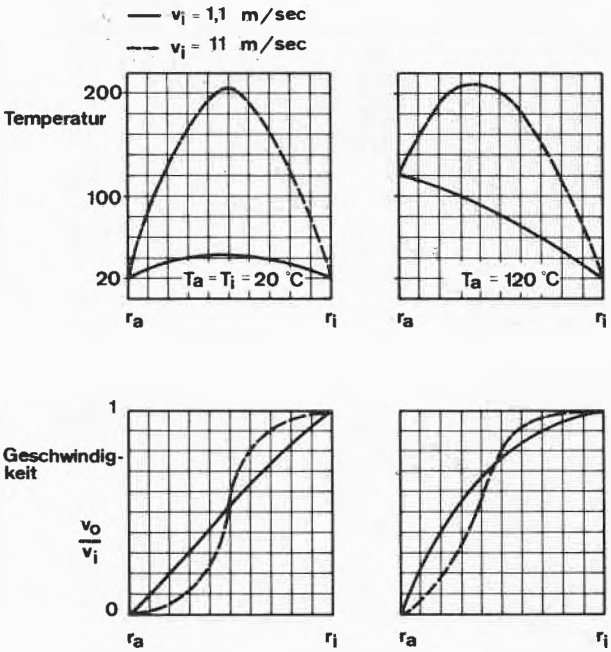

Abb. 2: Temperatur- und Geschwindigkeitsverlauf in der Flüssigkeitsschicht zwischen innerem rotierendem (r_i) und äusserem ruhendem Zylinder (r_a) bei den Rotationsgeschwindigkeiten v_i = 1,1 und 11 m/s und $T_a = T_i$ = 20 °C bzw. T_a = 120 °C. (Flüssigkeit: Silikonöl AK 100000, η_0 = 25 Pa · s bei T = 25 °C, b = 0,0175, n = 0,74, r_a = 75 mm, r_i = 70 mm).

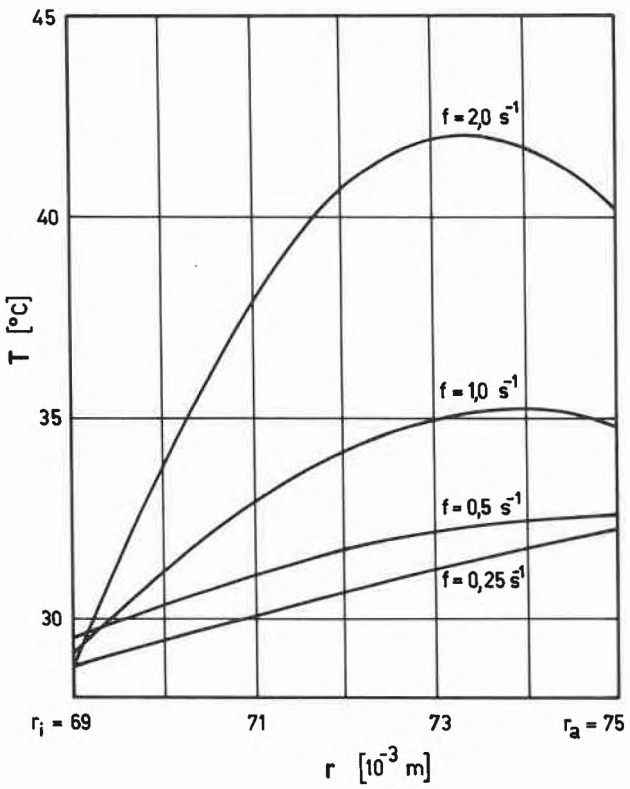

Abb. 3: Temperaturverlauf in der Flüssigkeitsschicht bei verschiedenen Rotordrehzahlen f (Flüssigkeit: Oppanol B 3, n = 0,943).

4. Bestimmung der Rotorantriebsleistung der an die Wandungen übertragenen Wärme

Die Rotorantriebsleistung P lässt sich berechnen nach:

$$P = 2\pi r_i^2 h \tau_i \Omega \tag{19}$$

τ_i ist dabei durch Gleichung (3) für $x = 1$ und $\theta = 0$ gegeben. Nach Gleichung (4) für das Schergeschwindigkeitsgefälle D_i und nach Differentiation von Gleichung (14) für den Geschwindigkeitsgradienten an der Stelle $r = r_i$ findet man für τ_i:

$$\tau_i = \eta_i \Omega^n \left(\frac{2\, n\, c_2^2\, c_3}{Br\, B\, c_1\, (1+c_3)^2} \right)^n \tag{20}$$

Aus Gl. (19) und (20) ergibt sich in dimensionsloser Darstellung für die Rotorantriebsleistung als Funktion der Integrationskonstanten und der dimensionslosen Kennzahlen Br, B, k und n:

$$\frac{P}{2\pi r_i^2 h\, \eta_i \Omega^{n+1}} = \left(\frac{2\, n\, c_2^2\, c_3}{Br\, B\, c_1\, (1+c_3)^2} \right)^n \tag{21}$$

Die nach dem Temperaturverlauf nach Abb. 2 an die innere Zylinderfläche übertragene Wärmestromdichte q_i^* kann wie folgt berechnet werden:

$$q_i^* = \lambda \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r_i} = \lambda \frac{T_a - T_i}{r_i} \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=1} \tag{22}$$

Mit α_{tot} nach Gleichung (23) führt man den auf die Temperaturdifferenz $(T_a - T_i)$ bezogenen «totalen» Wärmeübergangskoeffizienten ein, der sowohl die vom äusseren Zylinder zugeführte wie auch die in der Flüssigkeit dissipierte Energie berücksichtigt:

$$q_{i\,tot}^* = \alpha_{tot} (T_a - T_i) \tag{23}$$

Für die mit α_{tot} gebildete Nusseltzahl Nu_{tot} ergibt sich somit mit Gl. (13)

$$Nu_{tot} = \frac{\alpha_{tot}\, r_i}{\lambda} = \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=1} = \frac{n}{B} \left(c_2 + \frac{2}{n} - \frac{2\, c_2\, c_3}{1+c_3} \right) \tag{24}$$

Analog kann die am äusseren Zylinder zugeführte Wärme bei $T_a > T_i$ ermittelt werden.

$$q_a^* = \lambda \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r_a} = \lambda \frac{T_a - T_i}{r_i} \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=k} \tag{25}$$

Bezieht man wie in Gleichung (23) diesen thermisch übertragenen Wärmestrom auf die Fläche des inneren Zylinders und die Temperaturdifferenz $(T_a - T_i)$, so findet man über den «Thermischen» Wärmeübergangskoeffizienten α_{th} und Nu_{th}

$$q_a^*\, k = \alpha_{th} (T_a - T_i) \tag{26}$$

und mit (13):

$$Nu_{th} = \frac{\alpha_{th} \cdot r_i}{\lambda} = k \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=k} = \frac{n}{B} \left(c_2 + \frac{2}{n} - \frac{2\, c_2\, c_3\, k^{c_2}}{1 + c_3\, k^{c_2}} \right) \tag{27}$$

Für eine gegebene Spaltgeometrie (k = 1,087) und einen angenommenen Flüssigkeitsindex n = 0,943 sind die nach Gleichungen (24) und (27) ermittelten Nu-Werte als Funktion der *Brinkmann*-Zahl Br und den die Temperaturabhängigkeit der Viskosität berücksichtigenden Stoffwert $= b(T_a - T_i)$ in Abb. 4 dargestellt. Für den Spezialfall $Br = 0$ (entspricht bei $T_a > T_i$ einer vernachlässigbar kleinen Dissipationsleistung nach Gl. (8)) ist die Wärmestromdichte q_a^* bzw. q_i^* am inneren bzw. äusseren Zylinder gegeben durch:

$$q_a^* = q_i^* = \frac{\lambda}{r_i \ln k} (T_a - T_i) \tag{28}$$

Somit wird nach Gleichung (24) und (27)

$$Nu_{tot} = Nu_{th} = \frac{1}{\ln k} \tag{29}$$

Nach Abb. 3 wird bei kleinen Drehzahlen (f = 0,25 und 0,5 s^{-1}) bei der sich einstellenden äusseren Temperatur $T_a > T_i$ im stationären Fall die von aussen über die äussere Zylinderfläche und über den Rotorantrieb zugeführte Leistung vollständig an die innere Zylinderfläche übertragen. Nach Abb. 4 muss sich somit für Nu_{th} ein Wert grösser als Null ergeben. Mit zunehmender Drehzahl f und damit höherer Brinkmannzahl Br ist im Fall von $f > 1\, s^{-1}$ die Dissipationswärme so gross, dass sich für den Temperaturverlauf nach Abb. 3 ein Temperaturmaximum in der beeinflussten Flüssigkeitsschicht einstellt. Obwohl $T_a > T_i$, wird unter diesen Verhältnissen ein Teil der Dissipationswärme sogar an die äussere Zylinderfläche übertragen.

Dies führt zu dem nach Abb. 4 bei $Br > 2$ negativen Wert für Nu_{th} je nach Stoffgrösse B.

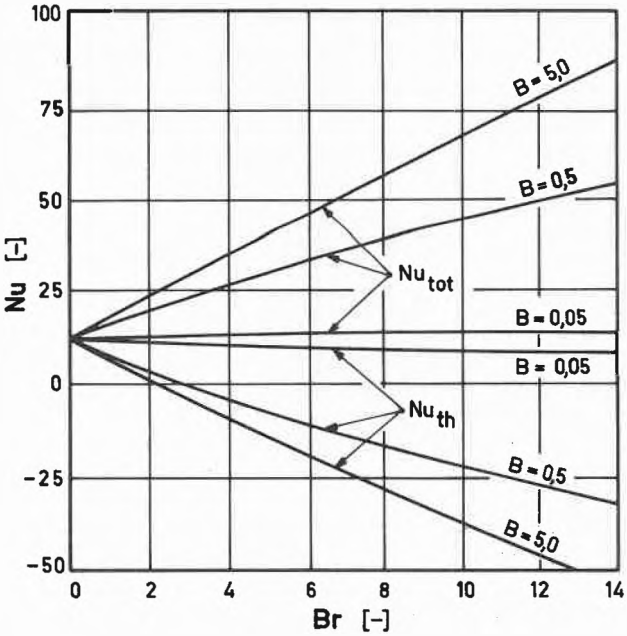

Abb. 4: Nu_{tot} bzw. Nu_{th} als Funktion der *Br*-Zahl mit *B* als Parameter für Oppanol B 3 (n = 0,943) und k = 1,087.

Für die Optimalisierung beispielsweise eines Aufschmelzextruders ist es interessant, das Verhältnis zwischen der über die Dissipation (Antriebsleistung *P*) und der über den äusseren Zylinder dem Produkt zugeführte Energie zu kennen.

$$\gamma = \frac{P}{Q_i^*} = \frac{Q_i^* - Q_a^*}{Q_i^*} = 1 - \frac{q_a^* k}{q_i^*} \tag{30}$$

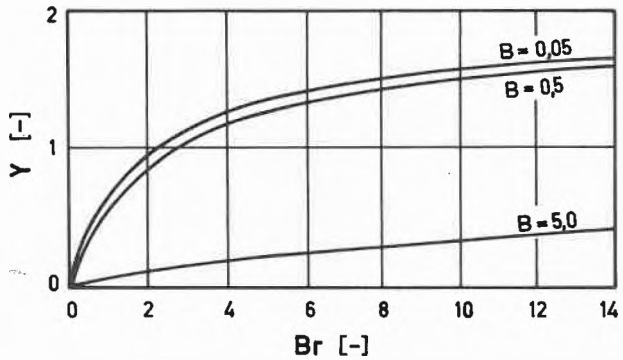

Abb. 5: Energieverhältnis γ als Funktion der Brinkmannzahl *Br* für Oppanol B 3 (n = 0,943) und k = 1,087.

Dieses Verhältnis zwischen der über den Rotor und der über die äussere Zylinderfläche zugeführten Energie lässt sich als Funktion der Integrationskonstanten c_2 und c_3 und damit als Funktion von *Br*, *B*, *n* und *k* darstellen:

$$\gamma = 1 - \frac{\left(c_2 + \frac{2}{n} - \frac{2\, c_2\, c_3\, k^{c_2}}{1 + c_3\, k^{c_2}}\right)}{\left(c_2 + \frac{2}{n} - \frac{2\, c_2\, c_3}{1 + c_3}\right)} \tag{31}$$

Das Verhältnis γ ist als Funktion der Brinkmannzahl *Br* für verschiedene Koeffizienten *B* in Abb. 5 aufgetragen. Für $Br \to \infty$ ergibt sich $\gamma = 2$, d.h. die Hälfte der erzeugten Dissipationswärme wird an den inneren Zylinder übertragen. Beobachtungen an Dünnschichtverdampfern entsprechen dem in Abb. 4 berechneten Verlauf für

$\gamma = f\,(Br, B, n, k)$ [6, 7].

Die Verfasser danken dem Schweizerischen Nationalfonds für die finanzielle Unterstützung dieses Projektes (Projekt Nr. 2.621).

Symbolverzeichnis

b	Temperaturkoeffizient der Viskosität	[K^{-1}]
B	$b\,(T_a - T_i)$	[–]
c	Integrationskonstante	
D	Schergeschwindigkeitsgefälle	[s^{-1}]
f	Drehzahl	[s^{-1}]
n	Flüssigkeitsindex	[–]
P	Rotorantriebsleistung	[W]
q^*	Wärmestromdichte	[W/m^2]
Q^*	Wärmestrom	[W]
r	Radius	[m]
T	Temperatur	[K]
v	Geschwindigkeit	[m/s]
V	dimensionslose Geschwindigkeit ($= v_\theta/\Omega\, r_i$)	[–]
x	dimensionsloser Radius ($= r/r_i$)	[–]
α	Wärmeübergangskoeffizient	[$W/m^2\,K$]
γ	Energieverhältnis ($= P/Q_i^*$)	[–]
k	Radiusverhältnis ($= r_a/r_i$)	[–]
λ	Wärmeleitfähigkeit	[W/mK]
η	dynamische Viskosität	[Pa s]
Ω	Winkelgeschwindigkeit	[s^{-1}]
ϱ	Dichte	[kg/m^3]
τ	Schubspannung	[Pa]
θ	dimensionslose Temperatur ($=(T-T_i)/(T_a-T_i)$)	[–]

Indices

i innerer Zylinder
a äusserer Zylinder

Literaturverzeichnis

1 *H. J. Godau:* Strömungsvorgänge im Dünnschichtverdampfer. Chem. Techn. *26* (1974) 9, 561/564.
2 *J. Jeisy, Y. Trouilhet* und *P. Grassmann:* Energieverbrauch im Knetteil eines Buss-Ko-Kneters. Verfahrenstechnik *10* (1976) 2, 79/83.
3 *W. Knöpfli:* Charakteristik eines Wendelrührers beim Mischen viskoser newtonscher Flüssigkeiten unter Berücksichtigung des Einflusses der Rührgeometrie auf die Leistungsaufnahme und Mischzeit. Diss. ETH Nr. 5105 Zürich (1973).
4 *R. B. Bird, E. W. Stewart* und *E. N. Lightfoot:* Transport Phenomena. John Wiley, New York 1960.
5 *Y. Trouilhet:* Influence de la chaleur de dissipation sur l'écoulement de Couette non-newtonien. Diss. ETH Nr. 5779 Zürich 1976.
6 *F. Widmer:* Behandlung viskoser Stoffe in Dünnschichtapparaten. Dechema Monographien *66* (1971) 1193/1221.
7 *F. Widmer:* Zum Einsatz von Dünnschichtapparaten bei hochviskosen Medien und bei der Erzeugung von Trockenprodukten. Chemiker-Zeitung *95* (1971) 772/780.