

Verweilzeit in Dünnschichtapparaten

B. Covelli* und F. Widmer**, Institut für Verfahrens- und Kältetechnik der ETH Zürich

Abstract

In this work the residence time of a mechanically influenced liquid film in a falling film evaporator has been investigated theoretically. Basing on the assumption that by the rotor blades passages the liquid film is hesitated, one can conceive the vertical fluid dynamic in the film as a instationary process. The mathematical definition leads to a differential equation, which can be solved analytically. The results shows a good accuracy with the experiments at the thin film.

1. Einleitung

Bei der Behandlung von temperaturempfindlichen Flüssigkeits-Gemischen erweisen sich Fallfilm- und Dünnschichtapparate als vorteilhaft, da sie sich durch kurze Verweilzeiten der Flüssigkeit und geringe Flüssigkeitsinhalte auszeichnen. Im Dünnschichtapparat wird der Wärme- und Stoffübergang infolge der mechanisch durch die rotierenden Einbauten im Flüssigkeitsfilm erzeugten Turbulenz vor allem bei viskoserer Flüssigkeiten begünstigt und zugleich die Entnetzung der Heizfläche verhindert. Für den Einsatz eines Dünnschichtapparates ist die Kenntnis der Verweilzeit der Flüssigkeit vor allem bei Reaktionen von Bedeutung. Durch den Einfluss der Rotorblätter auf die Flüssigkeit ergeben sich aber komplizierte Strömungsverhältnisse, die sich bisher theoretisch nicht exakt erfassen liessen, so dass man auf experimentelle Daten angewiesen ist.

In dieser Arbeit soll nun versucht werden, die Verweilzeit bei nicht zu grossen Filmdicken (d. h. keine stark ausgebildeten Bugwellen vor dem Rotorblatt) im Fall eines Starrflügelrotors durch ein einfaches Modell analytisch zu erfassen und zu berechnen.

2. Beschreibung des Modells

Massgebend für das nachfolgende Modell ist die Voraussetzung, dass die mittlere Filmdicke entlang der Heizwand nur unwesentlich grösser ist als die freie Spaltbreite zwischen den Rotorblättern und der Wand. Dadurch können sich vor den Rotorblättern keine grossen Bugwellen ausbilden, die strömungstechnisch äusserst schwierig zu erfassen sind. Obwohl diese Voraussetzung als einschneidend bezeichnet werden kann, darf doch darauf hingewiesen werden, dass diese vorausgesetzten Strömungsverhältnisse beim Verdampfen von Flüssigkeiten und hohen Eindampfverhältnissen im unteren Teil eines Apparates oft auftreten können. Das vorliegende Modell beruht auf der Annahme, dass an jeder Stelle, an der ein Rotorblatt über den Flüssig-

keitsfilm gleitet, die zwischen Rotorblatt und senkrechter Verdampferwand auftretenden Kräfte senkrecht zur Wand, gekoppelt mit den Reibungskräften, wesentlich grösser sind als die Schwerkraft. Als Folge dieser Annahme muss der Flüssigkeitsfilm bei jedem Blattdurchgang einen kurzen Moment in der Fliessrichtung parallel zur Rotorachse stehen bleiben, um sich danach erneut in einem instationären Anlaufvorgang zu einem Fallfilm auszubilden. Somit kann die mechanisch durch Rotorblätter beeinflusste Filmströmung entlang der Wand durch periodisch folgende instationäre Anlaufvorgänge eines laminaren Fallfilmes beschrieben werden. Die Anzahl dieser Anlaufvorgänge wird dabei durch die Rotorblattfolgefrequenz (das Produkt von Drehzahl und Blattzahl) festgelegt. Der Einfluss der Rotordrehzahl auf die Verweilzeit ist aus dieser Annahme sofort erkennbar.

Das nachfolgende Modell vernachlässigt im weiteren die Filmbewegung um die Rotorachse, so dass von einer zweidimensionalen, in x - und z -Richtung formulierten Theorie eines Fallfilmes auf einer ebenen senkrechten Platte ausgegangen werden darf.

3. Mathematisches Modell

Die instationäre *Navier-Stokessche* Differentialgleichung in z -Richtung (Abb. 1) für einen freien laminaren Fallfilm entlang einer senkrechten Platte lautet [1, 2]:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g \quad (1)$$

Für den Anlaufvorgang sind nach den oben getroffenen Annahmen folgende 3 Randbedingungen zu beachten:

$$v_z = 0 \quad x = 0, t \geq 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \quad x = \delta, t \geq 0 \quad (3)$$

$$v_z = 0 \quad t = 0, x \geq 0 \quad (4)$$

Nach der Modellvorstellung soll die Bewegung des Fallfilmes während der Zeit Δt zwischen zwei Rotor-

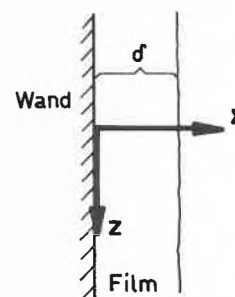


Abb. 1: Schematische Darstellung des Fallfilmes, der entlang der Wand in Richtung von z vertikal nach unten fließt.

* Dr. sc. techn. B. Covelli, Oberassistent am Institut für Verfahrens- und Kältetechnik der ETH, CH-8092 Zürich

** Prof. Dr. F. Widmer, Vorsteher des Institutes für Verfahrens- und Kältetechnik der ETH, CH-8092 Zürich

blattdurchgängen untersucht werden. Nach jedem Blattdurchgang findet der gleiche Anlaufvorgang statt. Dadurch wird die Geschwindigkeit v_z unabhängig von der Längskoordinate z , da nur noch die Blattfolgezeit Δt über die Anlaufvorgänge und somit über den zurückgelegten Weg $\Delta z = \int_0^{\Delta t} v_z dt$ bestimmt. Aufgrund des Ansatzes $v_z = v(x, t)$ vereinfacht sich Gleichung (1) zu

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g \quad (5)$$

Bei der Lösung der linearen Differentialgleichung (5) mit den Randbedingungen (2) bis (4) zerlegt man die Geschwindigkeit v in einen instationären und einen stationären Anteil [3] nach Gleichung (6):

$$v(x, t) = w(x, t) + w^s(x) \quad (6)$$

Mit Hilfe eines Potenzansatzes zweiter Ordnung für $w^s(x)$ findet man aufgrund der stationären Randbedingungen (2) und (3) die Beziehung

$$w^s(x) = -\frac{\rho g}{2\mu} x^2 + \frac{\rho g \delta}{\mu} x \quad (7)$$

Setzt man Gleichung (6) und (7) in (5) ein, so bleibt nur noch der instationäre Anteil

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8)$$

Mit dem Separationsansatz

$$w(x, t) = g(t) \cdot f(x) \quad (9)$$

findet man die Eigenwertgleichung

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} = -\lambda^2 = \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (10)$$

deren Lösungen in allgemeiner Form lauten [3]:

$$g(t) = a e^{-\lambda^2 t} \quad (11)$$

$$f(x) = \sum_{\lambda} (b_{\lambda} \sin \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \lambda x + c_{\lambda} \cos \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \lambda x) \quad (12)$$

Fasst man die Gleichungen (6), (7) und (11), (12) zusammen, erhält man die allgemeine Lösung des instationären Anlaufvorganges. Die Koeffizienten b_{λ} und c_{λ} sowie die Eigenwertmenge λ sind mit Hilfe der Randbedingungen (2) bis (4) zu bestimmen.

$$v(x, t) = \sum_{\lambda} e^{-\lambda^2 t} \left[b_{\lambda} \sin \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \lambda x + c_{\lambda} \cos \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \lambda x \right] + \frac{\rho g \delta}{\mu} x - \frac{\rho g}{2\mu} x^2 \quad (13)$$

Aus der Randbedingung (2) folgt unmittelbar

$$c_{\lambda} = 0 \quad (14)$$

Mit dem Gradienten nach Randbedingung (3) lässt sich die Eigenwertmenge λ finden.

$$\lambda = \frac{(2n+1) \pi \sqrt{\rho}}{2 \delta \sqrt{\mu}} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (15)$$

Die verbleibende Randbedingung (4) erlaubt, mit einer Fourrieranalyse über das Intervall $0 \leq x \leq \delta$ die fehlenden Koeffizienten b_{λ} zu berechnen.

$$b_{\lambda} = b_n = -\frac{4 \rho g \delta^2}{\pi \mu (2n+1)} \quad (16)$$

Will man vom nun bekannten Geschwindigkeitsprofil $v(x, t)$ auf die mittlere Verweilzeit schliessen, so muss die über die Filmdicke δ und über die Rotorblattfolgezeit Δt gemittelte Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ ermittelt werden.

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{\Delta t} \int_0^{\delta} v(x, t) dx dt}{\int_0^{\Delta t} \int_0^{\delta} dx dt} \quad (17)$$

Die zweifache Integration führt auf die folgende Gleichung für die mittlere Filmgeschwindigkeit $\langle v \rangle^*$.

$$\langle v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{8 \rho^2 \delta^4 g}{\pi^4 (2n+1)^4 \mu^2 \Delta t} \left[\exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \mu \Delta t}{4 \delta \rho}\right) - 1 \right] \right\} + \frac{\rho g \delta^2}{3 \mu} \quad (18)$$

Der letzte Term in Gleichung (18) entspricht dabei der stationären Fallfilmgeschwindigkeit eines laminaren Rieselfilmes entlang einer senkrechten Wand:

$$\langle v \rangle_{\text{stat}} = \frac{\rho g \delta^2}{3 \mu} \quad (19)$$

Mit der Apparatehöhe H erhält man schliesslich als mittlere Verweilzeit τ in einem Dünnschichtapparat

$$\tau = \frac{H}{\langle v \rangle} \quad (20a)$$

Üblicherweise ist bei der Auslegung von Dünnschichtapparaten die sogenannte Umfangsbelastung \dot{U} , d. h. das durchgesetzte Flüssigkeitsvolumen pro Meter Apparateumfang und Sekunde, vorgegeben.

$$\dot{U} = \frac{\dot{V}}{\pi D} \approx \langle v \rangle \delta$$

Damit lässt sich die Verweilzeit wie folgt ausdrücken

$$\tau = \frac{H \delta}{\dot{U}} \quad (20b)$$

Bei bekannter Umfangsbelastung wird mit Vorteil über die unbekannte mittlere Filmdicke δ iteriert.

4. Spezialfälle

4.1 Änderung der Randbedingung (4)

Mit der Randbedingung (4) wird festgelegt, dass im Augenblick des Rotorblattdurchgangs ($t = 0$) die Geschwindigkeit v_z des Fallfilmes sich auf null abbremst. Ändert man diese Annahme, indem v_z nicht auf null, sondern nur auf eine mittlere Geschwindigkeit v_M , die der Geschwindigkeit eines Fallfilmes zwischen 2 Platten

* Die Abhängigkeit der Summenterme von n wirkt so stark dämpfend, dass bei der Summation über n nur die ersten 3 bis 4 Terme massgebend sind.

entspricht, verzögert werden soll, lautet die neue Randbedingung (4):

$$v_z = v_M = \frac{\rho g \delta^2}{12 \mu} \quad t = 0, x \geq 0 \quad (21)$$

Durch diese Randbedingung (21) ändert die Herleitung der Beziehung (18) für $\langle v \rangle$ nur insofern, dass $\langle v \rangle$ mit v_M ergänzt werden muss. Als Lösung $\langle v \rangle_M$ des neuen Differentialgleichungssystems (2), (3), (5) und (21) findet man somit:

$$\langle v \rangle_M = \langle v \rangle + v_M \quad (22)$$

Die vorgestellten Möglichkeiten, die Randbedingung (4) respektive (22) zu formulieren, stellen Grenzwerte dar. In Wirklichkeit muss man annehmen, dass beim Rotordurchgang v_z auf einen Betrag zwischen 0 und v_M verzögert wird.

4.2 Sehr kleine Blattfolgezeiten

Bei grossen Drehzahlen strebt definitionsgemäss die Blattfolgezeit Δt gegen 0. Vollzieht man in Gleichung (18) den entsprechenden Grenzübergang, so findet man mit

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle v \rangle = \frac{\rho g \delta^2}{12 \mu} \quad (23)$$

die mittlere Geschwindigkeit eines Fallfilmes zwischen zwei Platten [2]. Dies entspricht der gewählten Modellvorstellung, da bei unendlich schnell drehendem Rotor dieser als Innenzylinder mit fester Wand erscheint. Vergleicht man im weiteren die aus den instationären Anlaufvorgängen gemittelten Filmgeschwindigkeiten (18) und (22) mit der Geschwindigkeit des stationären Fallfilmes (19) für $\Delta t \rightarrow 0$, lassen sich folgende Grenzwerte finden:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle v \rangle_{stat}}{\langle v \rangle} = 4 \quad (24)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle v \rangle_{stat}}{\langle v \rangle_M} = 2 \quad (25)$$

Daraus folgt, dass nach diesen Modellen bei sehr grosser Drehzahl und nicht zu grossen Filmdicken die Verweilzeit im Dünnschichtapparat 2 bis 4 mal grösser sein kann als in einem Fallfilmapparat.

5. Vergleich des Modells mit Messungen

An Dünnschichtapparaten wurden für Medien mit Viskositäten zwischen 0,1 Pa·s und 20 Pa·s Verweilzeitmessungen durchgeführt und die Ergebnisse mit einem empirischen Ansatz angeglichen, indem die Verweilzeit des entsprechenden freien Fallfilmes τ_F mit einem Blattfolgezeit-Term erweitert wurden [4].

$$\tau = \tau_F \left(1 + \frac{1}{\Delta t} \right)^{0,066} \quad \text{mit } \tau_F = \left(\frac{3 \mu}{\rho g U^*} \right)^{1/3} H \quad (26)$$

Mit diesem Ausdruck lassen sich die Verweilzeiten respektive die mittlere Filmgeschwindigkeit im Dünnschichtapparat auf etwa 10% genau berechnen.

Die nachfolgenden 3 Abbildungen zeigen den Vergleich der vorliegenden Theorie mit dem auf experimentellen Daten beruhenden Regressionsansatz respektive mit der daraus berechneten mittleren Geschwindigkeit v_{MES} .

Glycerin - Wasser

$\Delta t = 0,01$ $f = 100$

$\mu = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

$\rho = 1260 \text{ m}^3/\text{kg}$

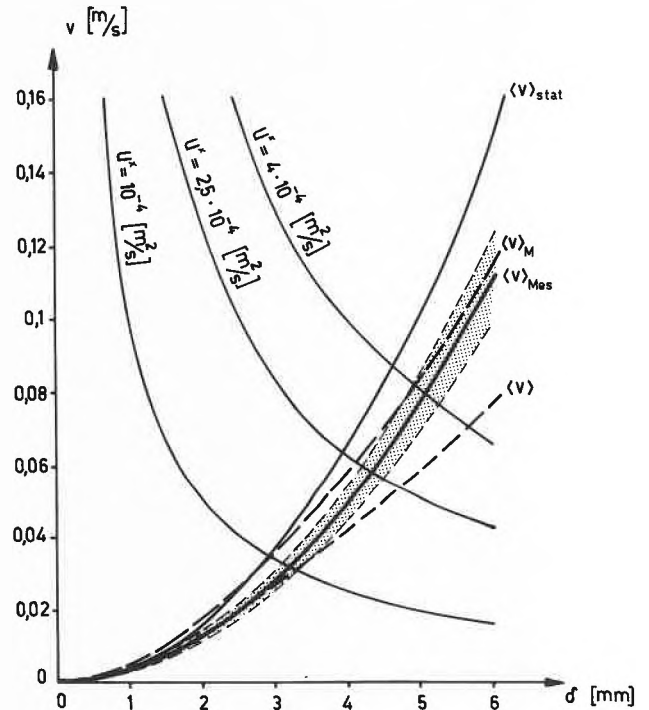


Abb. 2: Vergleich der theoretisch ermittelten Filmgeschwindigkeiten $\langle v \rangle$ und $\langle v \rangle_M$ mit der gemessenen $\langle v \rangle_{Mes}$ und der mechanisch unbeeinflussten $\langle v \rangle_{stat}$ bei relativ kleinen Blattfolgezeiten Δt und hoher Viskosität μ . Das punktierte Gebiet stellt die Messunsicherheit dar.

Bei höherer Viskosität beschreibt in Abb. 2 die beim Rotorblattdurchgang auf 0 abgebremste Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ (18) im Bereich $0 < \delta \leq 3$ mm den Regressionsansatz gut. Für die grösseren Schichtdicken $3 \text{ mm} \leq \delta \leq 6$ mm nähert sich v_{Mes} der Geschwindigkeit $\langle v \rangle_M$ (22), bei der der Film beim Rotorblattdurchgang nur auf die Geschwindigkeit eines Fallfilmes zwischen zwei Platten verzögert wird. Dieses Verhalten ist aufgrund der kleinen Blattfolgezeit ($\Delta t = 0,01$) verständlich. In der Abb. 3 wurde die Verweilzeit τ in Abhängigkeit der Umfangsbelastung \dot{U} bei den gleichen Voraussetzungen wie in der Abb. 2 aufgetragen. Vergrössert man die Blattfolgezeit bei gleichen Versuchsbedingungen, so scheint die Annahme des vollständigen Abbremsens des Filmes beim Rotorblattdurchgang bei der relativ hohen Viskosität von $\mu = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ zuzutreffen (Abb. 4).

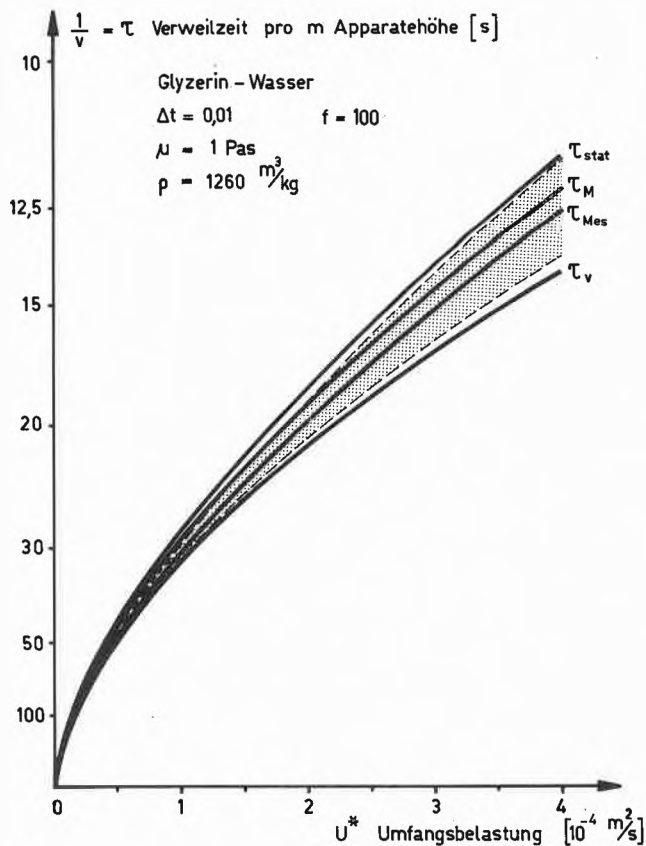


Abb. 3: Vergleich der Verweilzeiten in Funktion der Umfangsbelastung \dot{U} . Die Indizes entsprechen denjenigen in der Abbildung 2 (z. B. $\tau_M = \frac{1}{\langle v \rangle_M}$).

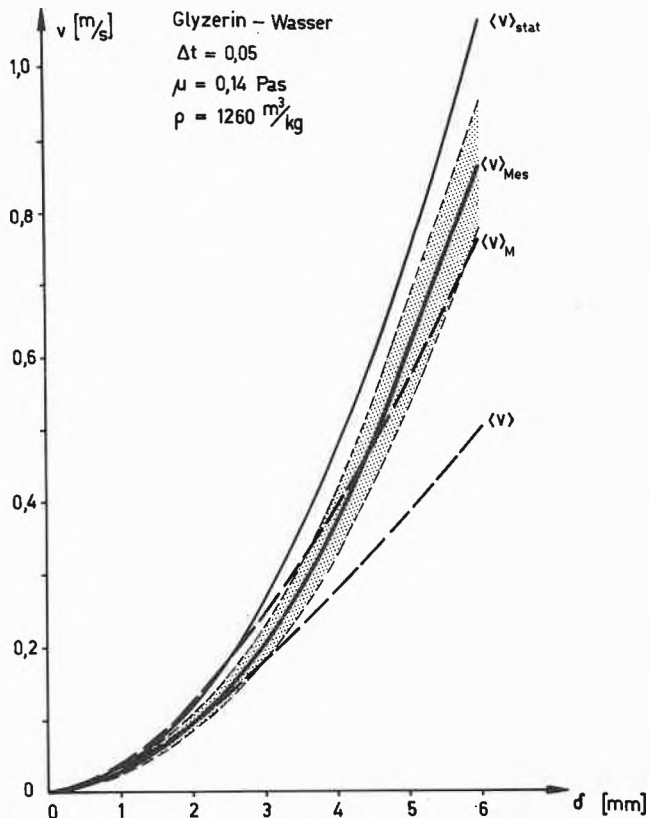


Abb. 5: Vergleich der theoretisch ermittelten Filmgeschwindigkeiten $\langle v \rangle$ und $\langle v \rangle_M$ mit der gemessenen $\langle v \rangle_{Mes}$ und der mechanisch unbeeinflussten $\langle v \rangle_{stat}$ bei relativ grossen Blattfolgezeiten und niedriger Viskosität μ . Das punktierte Gebiet stellt die Messunsicherheit dar.

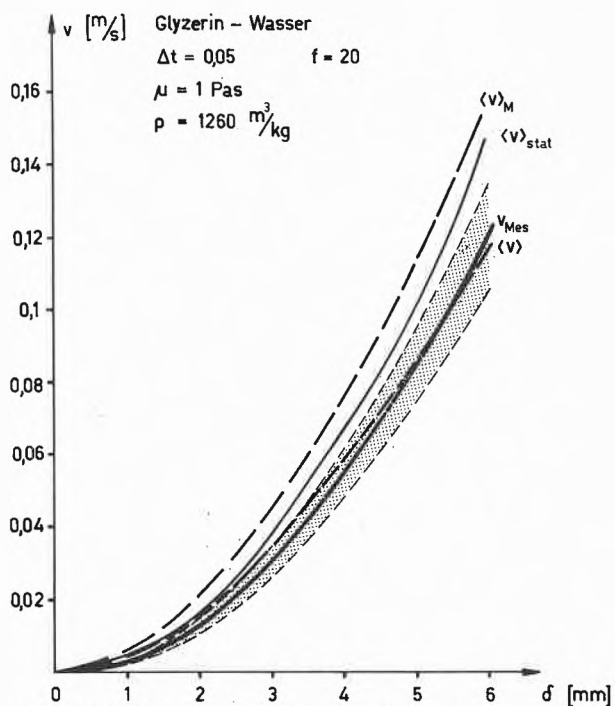


Abb. 4: Vergleich der theoretisch ermittelten Filmgeschwindigkeiten $\langle v \rangle$ und $\langle v \rangle_M$ mit der gemessenen $\langle v \rangle_{Mes}$ und der mechanisch unbeeinflussten $\langle v \rangle_{stat}$ bei relativ grossen Blattfolgezeiten Δt und hoher Viskosität μ . Das punktierte Gebiet stellt die Messunsicherheit dar.

Vermindert man bei kleinen Umdrehungszahlen zusätzlich die Viskosität ($\mu = 0,14 \text{ Pa}\cdot\text{s}$), so beschreibt wiederum bei kleinen Filmdicken ($0 < \delta \leq 3 \text{ mm}$) $\langle v \rangle$, und für δ zwischen 3 mm und 6 mm $\langle v \rangle_M$ den Regressionsansatz besser (Abb. 4).

Zusammenfassend lassen sich durch den experimentellen Regressionsansatz die folgenden Gültigkeitsbereiche der Theorie bestätigen:

- Für mittlere Filmdicken zwischen $0 < \delta \leq 3 \text{ mm}$ sowie für grosse Blattfolgezeiten bei hohen Viskositäten entspricht Gleichung (18) für $\langle v \rangle$ der gemessenen Geschwindigkeit v_{MES} gut.
- Bei kleinen Blattfolgezeiten oder bei niederen Viskositäten kommt für Filmdicken δ zwischen 3 mm und 6 mm der Ausdruck $\langle v \rangle_M$ der gemessenen Geschwindigkeit v_{MES} näher.

Symbolverzeichnis

a	Integrationskonstante	[-]
b_λ	Fourierkoeffizient	[-]
c_λ	Fourierkoeffizient	[-]
D	Apparatedurchmesser	[m]
g	Erdbeschleunigung	[m/s ²]
H	Apparatehöhe	[m]
t	Zeit	[s]
U	Umfangsbelastung	[m ² /s]

$v = v_z$	Geschwindigkeit in z-Richtung	[m/s]
v_{MES}	mittlere regressierte Filmgeschwindigkeit	[m/s]
v_M	Geschwindigkeit eines Filmes zwischen zwei Platten	[m/s]
$\langle v \rangle$	mittlere instationäre Filmgeschwindigkeit	[m/s]
$\langle v \rangle_M$	mittlere instationäre Filmgeschwindigkeit mit erweiterter Randbedingung (v_M)	[m/s]
$\langle v \rangle_{stat}$	Geschwindigkeit eines freien Fallfilmes	[m/s]
\dot{V}	Volumenstrom	[m ³ /s]
x	Koordinationsabstand senkrecht zur Fließrichtung	[m]
z	Koordinatenabstand in Fließrichtung	[m]
Δ	Differenz	[–]
δ	mittlere Filmdicke	[m]
λ	Eigenwert	[–]
μ	dynamische Viskosität	[kg/m s]

ρ	Dichte	[kg/m ³]
τ	mittlere Verweilzeit	[s]
τ_{Frei}	Verweilzeit bezogen auf den freien Fallfilm	[s]

Literaturverzeichnis

- 1 *L.D.Landau* und *E.M.Lifschitz*: Lehrbuch der theoretischen Physik: Hydrodynamik, Akademie-Verlag, Berlin 1971.
- 2 *R.Bird, W.Stewart* und *E.Lightfoot*: Transport Phenomena. John Wiley and Sons, New York 1960.
- 3 *R.Courant* und *D.Hilbert*: Methoden der Mathematischen Physik, Springer Verlag, Berlin 1968.
- 4 *B.Lorétan* und *E.Heimgartner*: Kontinuierliche Eindampfung und Entgasung viskoser Polymerschmelzen in dünnen Schichten, CIT 49 (1977) Nr.3 (MS 467/77).