

Vorschlag zur Berechnung beheizter kriechender Fallfilme

B. Covelli *, J. Dreier ** und E. Herren **, Institut für Verfahrens- und Kältetechnik der ETH Zürich

Abstract

An analysis is presented for flow properties of a viscous liquid film falling on a heated inclined plane. The mathematical techniques of boundary-layer theory are used, and the continuum-, momentum- and energy equations are solved numerically using an explicit difference technique. An iterative method of balances of materials and energy performs the stability of the computations. Experiments carried out with Newtonian Oppanol are in good agreement with the predictive values of the presented analysis.

1. Einleitung und Problembeschreibung

Um das Ausfliessen von Schmelzen aus Gefässen und Trichtern zu beschleunigen, werden diese oft beheizt. Dadurch wird die Viskosität der Schmelze erniedrigt und somit das Fliessverhalten der Flüssigkeitsfilme verbessert.

Das hydrodynamische Verhalten von rheologischen Flüssigkeiten hoher Viskosität, die aufgeheizt werden, ist bisher wenig untersucht worden, obwohl das Fliessverhalten bei gewissen Herstellungsprozessen von Kunststoffen von grösster Bedeutung sein kann. In dieser Arbeit wird das Aufheizen von kriechenden Filmen beliebiger Viskosität auf einer geneigten Ebene mit mathematisch-numerischen Methoden untersucht und an einem Beispiel mit Messungen an Oppanol [1] verglichen.

* Dr.sc.techn. B. Covelli ist Oberassistent am Institut für Verfahrens- und Kältetechnik der ETH, CH-8092 Zürich.

** dipl. Phys. J. Dreier und dipl. Masch. Ing. E. Herren sind wissenschaftliche Mitarbeiter am Institut für Verfahrens- und Kältetechnik der ETH, CH-8092 Zürich.

1.1 Beschreibung des Versuchsaufbaus

Auf einer geneigten Platte mit dem Neigungswinkel α fliesst ein Flüssigkeitsfilm (Abb.1) hoher Viskosität

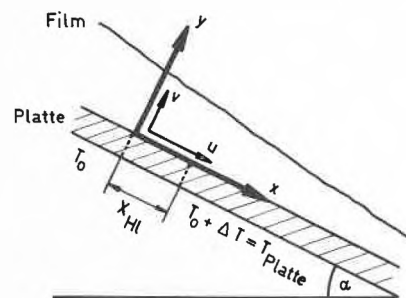


Abb. 1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus und der verwendeten Symbole.

unter Wirkung der Schwerkraft. Die Platte wird von der Stelle $x = 0$ an beheizt, und innerhalb der kurzen Aufheizstrecke x_{Hl} steigt die Plattentemperatur von der Umgebungstemperatur T_0 auf die konstante Heiztemperatur $T_0 + \Delta T$ an. Vor dem Aufheizen der Platte ($x < 0$) ist der Flüssigkeitsfilm als vollausgebildeter, laminarer kriechender Fallfilm zu betrachten.

2. Die Impuls- und Kontinuitätsgleichungen

Die Impulserhaltung in x -Richtung für den kriechenden Fallfilm ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + g \sin \alpha - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1a)$$

Für den langsam fließenden Film sind vor allem die Geschwindigkeitsprofile in y -Richtung (senkrecht zur Platte) ausgebildet und massgebend. Daher werden die folgenden vereinfachenden Annahmen getroffen:

- Glieder zweiter Ordnung in x -Richtung können gegenüber Glieder zweiter Ordnung in y -Richtung vernachlässigt werden.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- Die Viskositätsänderung infolge des Temperaturanstieges in x -Richtung wird gegenüber derjenigen in y -Richtung unbedeutend sein, da der Temperaturgradient in y -Richtung wesentlich stärker ausgebildet ist.

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

- Für den kriechenden Fallfilm darf der Druck als konstant angenommen werden:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Die Impulsgleichung (1a) nimmt mit diesen Vereinfachungen folgende Form an:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + g \sin \alpha \quad (1b)$$

Die Geschwindigkeit v senkrecht zur Platte muss der Kontinuitätsgleichung (2) genügen und kann somit über die Geschwindigkeit u parallel zur Platte ermittelt werden.

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Die Berechnung der Geschwindigkeit v kann auch mit Hilfe der Impulsgleichung für die y -Richtung, analog zu (1b) erfolgen. Die Auswertungen zeigen erwartungsgemäss keine nennenswerten Abweichungen für die Geschwindigkeit v , ob diese nun mit der Impulsgleichung in y -Richtung oder mit Gleichung (2) berechnet werden. Zweckmässig wendet man aber die numerisch einfachere Kontinuitätsgleichung an.

2.1 Die Randbedingungen für u und v

Vor dem Beginn des Aufheizens ($x < 0$) wird eine stationäre Fallfilmströmung bei einer konstanten Temperatur T_0 angenommen, d. h. die Strömungsprofile für u und v sind bekannt:

$$u = u_{\text{Start}}(y) \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq h_0 \quad (3)$$

$$v = v_{\text{Start}} = 0 \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq h_0 \quad (4)$$

$$\text{mit } u = 0 \text{ auf der Plattenoberfläche} \quad (5)$$

Die Lösung des vorliegenden Differentialgleichungssystems (Randwertproblem) bedingt die Formulierung einer Randbedingung an der Oberfläche des Filmes. Die Möglichkeit, den Schubspannungsgradienten an der Oberfläche gleich null zu setzen, muss fallengelassen werden, da die Filmdicke beim Aufheizen abnimmt und dabei die Oberflächenspannung auf-

grund der Oberflächenkrümmung in die Berechnung eingeht [2, 3]. In der vorliegenden mathematischen Darstellung ist die Oberflächenspannung allerdings nicht berücksichtigt. Die fehlende Randbedingung wird darum durch die folgende Anfangsbedingung ersetzt:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, T) \quad y = 0, \quad x > 0 \quad (6)$$

Die Funktion $f(x, T)$ soll die Startbedingungen für die Integration der Impulsgleichung derart erfassen, dass das u -Geschwindigkeitsprofil sowohl dem Aufheizevorgang wie auch der momentanen Filmhöhe gerecht wird.

2.2 Bestimmung von $f(x, T)$

Es wird angenommen, dass durch die Erwärmung die Filmoberfläche nicht allzu stark gekrümmt wird, so dass der Film innerhalb eines Integrationsschnittes Δx als quasistationär betrachtet werden darf. Falls man die Filmhöhe $h(x)$ sowie die Temperatur den lokalen Gegebenheiten anpasst, den Schubspannungsgradienten an der Oberfläche aufgrund der Quasistationarität jedoch gleich null setzt, erhält man als Lösung der Impulsgleichung (1b) für den Geschwindigkeitsverlauf das bekannte Parabelprofil:

$$u_p(y, x, T) = \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu(T)} \left(h(x) \cdot y - \frac{y^2}{2} \right) \quad (7)$$

Diese Gleichung dient dazu, den Startgradienten des u -Profils zu berechnen, indem die Geschwindigkeit u an der Stützstelle unmittelbar über der Platte im Abstand Δy gleich $u_p(\Delta y, x, T)$ gesetzt wird.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{u_p(\Delta y) - u_p(0)}{\Delta y} = f(x, T) \quad (8)$$

oder:

$$f(x, T) = \frac{\rho g \sin \alpha}{\Delta y \mu(T)} \left(h(x) \cdot \Delta y - \frac{\Delta y^2}{2} \right) \quad (9)$$

3. Die Energiegleichung

Beim kriechenden Fallfilm dürfen die dissipativen Anteile vernachlässigt werden. Die Energiegleichung nimmt dadurch die Form an:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

Wie bei den früheren Überlegungen (1) wird $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ gegenüber $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ vernachlässigt. Als Anfangsbedingung für den Temperaturverlauf gilt:

$$T = T_0 \quad x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq h_0 \quad (11)$$

Die Temperatur in der untersten Flüssigkeitsschicht direkt über der Platte soll gemäss der Grenzschichttheorie der Plattentemperatur entsprechen, die innerhalb der Aufheizstrecke $0 \leq x \leq x_{\text{Hl}}$ um ΔT erhöht wird. Der Wärmefluss q^* , der vom Film aufgenommen wird, kann mit Hilfe des auf die mittlere Film-

temperatur T_M bezogenen Wärmeübergangskoeffizienten α_{PF} folgendermassen erfasst werden:

$$q^* = \alpha_{PF}(T_{\text{Platte}} - T_M) = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (12)$$

mit

$$T_M = \frac{\int_0^{h(x)} T \cdot u \cdot dy}{\int_0^{h(x)} u \cdot dy}, \quad Nu = \frac{\alpha_{PF} \cdot h}{\lambda} = Re^m Pr^n \quad (13)$$

Bei diesem Wärmefluss sind α_{PF} , T_M und T_{Platte} von den lokalen Temperaturbedingungen abhängig und müssen daher mit jedem Δx -Integrationsschnitt den neuen Gegebenheiten angepasst werden.

4. Numerisches Vorgehen

Nach Abb. 2 wird der Film örtlich in einen Raster eingeteilt, bei dem die Schritte Δx in Strömungsrichtung mit N und die Schritte Δy senkrecht zur Strömungsrichtung mit J indiziert sind. Der Berechnungsablauf sieht vor, dass zu jedem Integrationsschritt Δx die zugehörigen Profile in y -Richtung berechnet werden*.

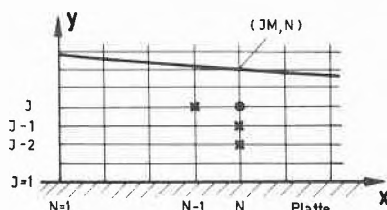


Abb. 2: Schematische Darstellung des für die numerischen Berechnungen benützten örtlichen Rasters.

4.1 Numerische Darstellung des Gradienten

Zur Bestimmung der Ableitungen erster und zweiter Ordnung in y -Richtung an der Stelle (J, N) werden zwei Taylorreihen um (J, N) entwickelt und nach dem zweiten Glied abgebrochen [4], [5]. Als Beispiel für die Geschwindigkeit u :

$$U(J-1, N) = U(J, N) - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(J, N)} \Delta y + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(J, N)} \frac{\Delta y^2}{2} \quad (14a)$$

$$U(J-2, N) = U(J, N) - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(J, N)} (2\Delta y) + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(J, N)} (2\Delta y^2) \quad (14b)$$

Diese beiden Gleichungen nach $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(J, N)}$ respektive $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(J, N)}$ aufgelöst, ergeben:

* Aufgrund der relativ zur x -Richtung starken Änderung der u -, v - und T -Profile in y -Richtung und um die Randbedingungen optimal auszunützen, werden zur Berechnung des Punktes (J, N) die Stützstellen $\{(J-1, N), (J-2, N), (J, N-1)\}$ herangezogen. Dieses Vorgehen verhindert, dass bei der Bestimmung der Filmhöhe respektive der obersten Stützstellen $\{(JM, N), (JM-1, N)\}$ Schwierigkeiten auftauchen.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(J, N)} = \frac{3U(J, N) + U(J-2, N) - 4U(J-1, N)}{2\Delta y} \quad (15a)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(J, N)} = \frac{U(J, N) + U(J-2, N) - 2U(J-1, N)}{\Delta y^2} \quad (15b)$$

In analoger Weise werden die Gradienten von v und T bestimmt. Diese ersetzen die Gradienten in den Differentialgleichungen (1b), (2) und (10). Die Impulsgleichung (1b), gekoppelt mit der Kontinuitätsgleichung (2) führt vorerst zu einer Bestimmungsgleichung für die lokale Geschwindigkeit $U(J, N)$ und anschliessend mit Gleichung (2) auch für $V(J, N)$. Mit der Energiegleichung und den bekannten lokalen Geschwindigkeiten $U(J, N)$ und $V(J, N)$ lässt sich dann auch die gesuchte Temperatur $T(J, N)$ bestimmen.

Zur Stabilisierung des Rechenprogrammes wird empfohlen, über den unmittelbar über der Platte anfänglich noch unbekannten Temperaturgradienten solange zu iterieren, bis die integrale Energiezunahme über den Film dem im Schritt Δx aufgenommenen Wärmestrom $\dot{q}$ entspricht. Ebenfalls kann die Filmhöhe $h(x)$ in einer weiteren Iteration dem konstanten Durchsatz und dem durch die Differentialgleichung festgelegten Geschwindigkeitsprofil $\{U(J, N)\}$ angepasst werden.

5. Ergebnis der Berechnungen

Für den durch die nachfolgenden Angaben festgelegten spezifischen Fall wurde der Einfluss verschiedener Parameter wie Platteneignung, Temperaturanstieg beim Aufheizen, Filmhöhe und Aufheizart auf die Filmhöhe untersucht. Als rheologische Flüssigkeit, von welcher die Stoffwerte bekannt sind und für die auch Messungen in einer Messanordnung nach Abb. 1 vorliegen, diente Oppanol [1].

Stoffwerte des Produktes:

spez. Wärme [25°C]	$c_p = 1980$ [J/kg K]
Dichte [25°C]	$\rho = 881$ [kg/m³]
Wärmeleitfähigkeit [25°C]	$\lambda = 0,188$ [W/m K]
Viskosität	$\mu = 16,77 + \frac{967,4}{(T-273,09)}$ [Ns/m²]

Abb. 3 zeigt die theoretische Abnahme der berechneten Filmhöhe bei unterschiedlichen Plattentemperaturen und Anfangshöhen im Vergleich zu den Messungen. Der Verlauf der berechneten Höhenabnahme wird durch die gemessenen Werte bestätigt. Das Aufheizen der Platte selbst zwischen $x=0$ und $x=x_{HI}$ von der Starttemperatur T_0 auf die gewünschte Plattentemperatur T_{Platte} erfolgte durch einen exponentiellen Temperaturanstieg, wobei die Aufheizlänge x_{HI} den Messungen angepasst werden musste, da keine Messungen darüber vorliegen. Der Einfluss der Aufheizlänge ist in Abb. 3 sichtbar, bei der die Kurve C' mit einer Aufheizlänge von $x_{HI} = 8$ cm und die Kurve C'' mit einer solchen von $x_{HI} = 3$ cm berechnet wurden. Von Bedeutung ist, dass die Filmhöhe unabhängig von der Art des Aufheizens nach etwa 10 cm die gleiche Höhe erreicht.

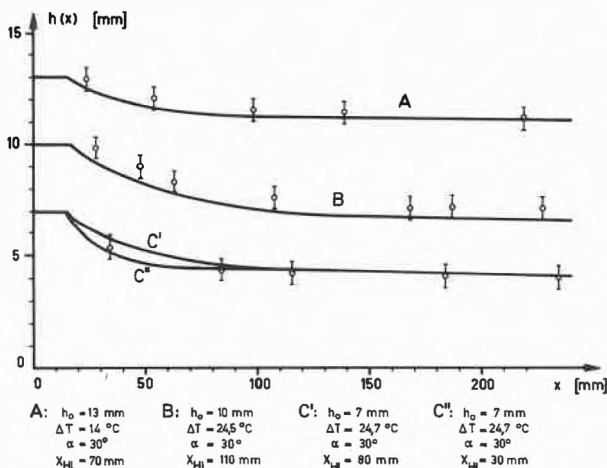


Abb. 3: Vergleich der Messresultate mit den theoretischen Berechnungen für verschiedene Anfangshöhen und Temperaturdifferenzen.

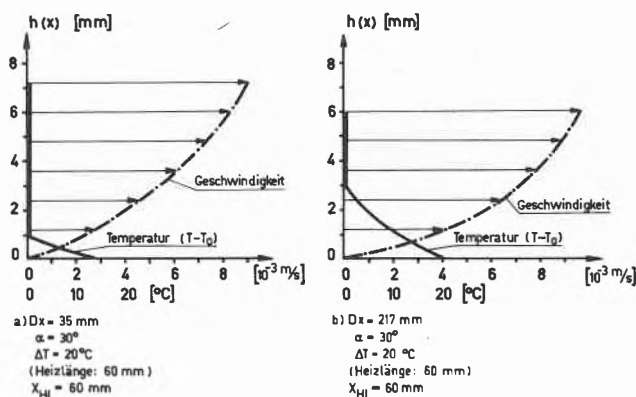


Abb. 4: Berechnete Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile in der Aufheizphase und in der Strömungsphase für den gleichen Flüssigkeitsfilm.

In Abb. 4 sind Geschwindigkeits- und Temperaturprofile eines Filmes mit der Anfangshöhe von 9 mm in der Aufheizphase ($x = 3,5 \text{ cm} < x_{HI}$) und Strömungsphase ($x = 22 \text{ cm}$) dargestellt. Entgegen der Erwartung hat sich das Temperaturprofil nach 22 cm nur bis zur Filmmitte ausgebildet. Die oberen Schichten weisen somit noch die Anfangstemperatur auf. Dies wurde auch durch Messungen [1] bestätigt. Stücheli [1] konnte mit einem Laser-Doppler-Anemometer die Geschwindigkeitsprofile eines beheizten Filmes ausmessen. Seine Ergebnisse stimmen mit den vorliegenden Berechnungen überein.

Abb. 5 und 6 zeigen den Einfluss der Plattenneigung α und der Anfangsstarthöhe auf die sich einstellende Filmhöhe auf der Platte. Bei allen Berechnungsfällen wurde mit gleicher Aufheizlänge und gleicher Aufheizart (linearer Temperaturzuwachs von T_0 auf T_{Platte}) gearbeitet. Deutlich ist die Abnahme der Filmhöhe auch noch zwischen $x = 15 \text{ cm}$ und $x = 20 \text{ cm}$ sichtbar, was vom nicht vollständig ausgebildeten Temperaturprofil herrührt.

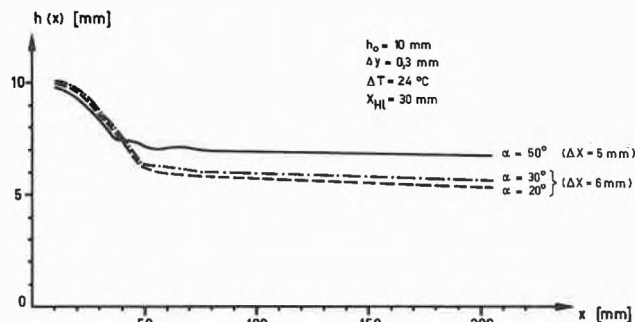


Abb. 5: Einfluss der Plattenneigung auf die Höhe des beheizten Filmes.

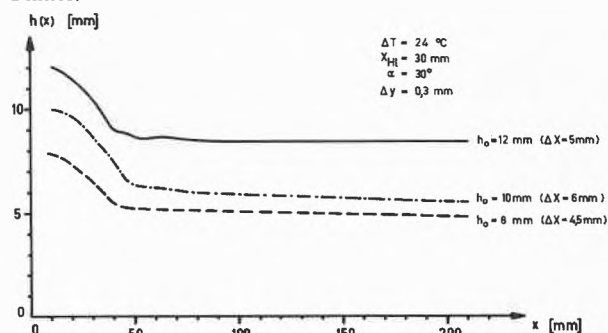


Abb. 6: Einfluss der Anfangshöhe auf die Höhe des beheizten Filmes.

Die Verfasser danken dem Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (Projekt Nr. 2.621) für die Bereitstellung der finanziellen Mittel zur Durchführung der Untersuchungen.

Symbolverzeichnis

a	$\lambda / (g c_p)$ Temperaturleitfähigkeit	$[\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck	$[\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}]$
Dx	Abstand des Netzpunktes in x -Richtung	$[\text{m}]$
Dy	Abstand des Netzpunktes in y -Richtung	$[\text{m}]$
g	Gravitationskonstante	$[\text{m s}^{-2}]$
$h(x)$	Höhe des Filmes an der Stelle x	$[\text{m}]$
h_0	Höhe des ausgebildeten unbeheizten Filmes	$[\text{m}]$
p	Druck	$[\text{N m}^{-2}]$
q	Wärmefluss	$[\text{W m}^{-2}]$
T	Temperatur	$[\text{K}]$
T_0	Temperatur des unbeheizten Filmes = Umgebungstemperatur	$[\text{K}]$
$T(J, N)$	Temperatur im Netzpunkt (J, N)	$[\text{K}]$
T_M	Mitteltemperatur	$[\text{K}]$
T_{Platte}	Temperatur auf der Plattenoberfläche	$[\text{K}]$
u	Geschwindigkeit in Plattenrichtung	$[\text{m s}^{-1}]$
$U(J, N)$	Geschwindigkeit im Netzpunkt (J, N)	$[\text{m s}^{-1}]$
v	Geschwindigkeit senkrecht zur Platte	$[\text{m s}^{-1}]$
$V(J, N)$	Geschwindigkeit im Netzpunkt (J, N)	$[\text{m s}^{-1}]$
x_{HI}	Aufheizstrecke	$[\text{m}]$
x, y	Achsenbezeichnung nach Abb. 1	$[\text{m}]$
α_{PF}	Wärmeübergangszahl	$[\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}]$
α	Neigungswinkel	$[\text{°}]$
λ	Wärmeleitfähigkeit	$[\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}]$
μ	dynamische Viskosität	$[\text{Ns m}^{-2}]$
ρ	Dichte	$[\text{kg m}^{-3}]$
Δ	Differenz	$[-]$

Literaturverzeichnis

- 1 *A. Stücheli*: Ebene isotherme und nicht-isotherme Rieselfilmströmung Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten. Dissertation ETH Zürich Nr. 5785 (1976).
- 2 *L. Landau* und *E. Lifschitz*: Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. VI, Akademie-Verlag, Berlin 1971.
- 3 *R. Bird, W. Stewart* und *E. Lightfoot*: Transport Phenomena, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney 1960.
- 4 *M. Oezisik*: Boundary Value Problems of Heat Conduction, International Textbook Company, Scranton, Pennsylvania 1968.
- 5 *A. Björk* und *G. Dahlquist*: Numerische Methoden, R. Oldenburger Verlag, München, Wien 1972.